PRECÁLCULO

# EXPRESIONES FRACCIONARIAS

## CUADERNO DE TRABAJO

Simplificación y Operaciones


Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

# Teoría: Fracciones Algebraicas

Una expresión fraccionaria es el cociente de dos polinomios. Dominar su manipulación es el pasaporte directo para sobrevivir a los límites y derivadas en cálculo superior.

Para simplificar, debemos **factorizar completamente** tanto el numerador como el denominador y luego cancelar los factores comunes.

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (\text{si } c \neq 0)$$

**Dominio:** El denominador de una fracción jamás puede ser cero. Cualquier valor de la variable que anule el denominador debe excluirse.

COMENTARIO

¡Hola a todos! Las fracciones algebraicas se operan EXACTAMENTE igual que las fracciones numéricas. Si saben sumar $1/2 + 1/3$, ¡ya saben álgebra!

- **Multiplicación:** Se multiplican numeradores entre sí y denominadores entre sí. ¡Factorice antes de multiplicar para facilitar la vida! $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$.
- **División:** Se invierte la segunda fracción y se multiplica. $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$.

COMENTARIO

**¡ERROR FATAL!** Tachar términos en lugar de factores. $\frac{x+2}{2} \neq x$. ¡El 2 está atado por una suma! Solo pueden cancelar si hay multiplicación.

Para sumar o restar fracciones con distinto denominador, necesitamos el **Mínimo Común Múltiplo (MCM)** de los polinomios. El MCM incluye cada factor primo con su mayor exponente.

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{D} = \frac{AD + BC}{CD}$$

**Fracciones Complejas:** Son fracciones que contienen fracciones en su numerador y/o denominador. Se resuelven simplificando el numerador y el denominador por separado, y luego multiplicando extremos y medios (la famosa "ley de la oreja").

COMENTARIO

Para hallar el MCM de polinomios, factoricen todo primero. Es como buscar el MCM de números: toman los factores comunes y no comunes al mayor exponente.

# Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: Simplificación

**Enunciado:** Simplifique la expresión $\frac{x^2-9}{x^2-6x+9}$.
**Solución:** Factorizamos el numerador (diferencia de cuadrados): $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.
Factorizamos el denominador (trinomio cuadrado perfecto): $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.
Reemplazamos: $\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-3)}$.
Cancelamos un factor $(x-3)$: $\frac{x+3}{x-3}$. (Válido si $x \neq 3$).

### Problema Resuelto 2: Multiplicación

**Enunciado:** Efectúe $\frac{x^2+2x}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-2x}{x^3}$.
**Solución:** Factorizamos todo:
Num 1: $x(x+2)$. Den 1: $(x-2)(x+2)$.
Num 2: $x(x-2)$. Den 2: $x^3$.
Escribimos como un solo producto: $\frac{x(x+2)\cdot x(x-2)}{(x-2)(x+2)\cdot x^3} = \frac{x^2(x+2)(x-2)}{x^3(x-2)(x+2)}$.
Cancelamos factores comunes: $\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$. (Con $x \neq 0, 2, -2$).

····▷ COMENTARIO
¡Nunca desarrollen las multiplicaciones en los numeradores hasta que hayan cancelado todo lo posible!

### Problema Resuelto 3: Resta con MCM

**Enunciado:** Reste y simplifique $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$.
**Solución:** Factorizamos denominadores: El segundo es $(x-1)(x+1)$.
El MCM es $(x-1)(x+1)$.
Amplificamos la primera fracción: $\frac{x(x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)}$.
Restamos numeradores: $\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x+1)}$.
Factorizamos el nuevo numerador: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$.
Reemplazamos y cancelamos: $\frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x+2}{x+1}$.

### Problema Resuelto 4: Fracción Compleja

**Enunciado:** Simplifique $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$.
**Solución:** Operamos el numerador principal: $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$.
Operamos el denominador principal: $1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.
Dividimos multiplicando extremos y medios: $\frac{x+1}{x} \div \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)\cdot x^2}{x\cdot(x^2-1)}$.
Factorizamos $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y simplificamos:
$\frac{x^2(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x-1}$.

····▷ COMENTARIO
El truco de extraer el signo negativo "$-1$"salvará sus vidas cuando tengan binomios invertidos. ¡Anótenlo!

**Problema Resuelto 5: Factorización con Signos Opuestos**

**Enunciado:** Simplifique $\frac{a^2-b^2}{b-a}$.
**Solución:** Numerador: $(a-b)(a+b)$.
Denominador: $b-a$. Observamos que $b-a=-1(a-b)$.
Reemplazamos: $\frac{(a-b)(a+b)}{-1(a-b)}$.
Cancelamos $(a-b)$: $\frac{a+b}{-1}=-(a+b)=-a-b$.

# Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

## Aplicación 1: Óptica (Lentes)

**Contexto:** La distancia focal $f$ de una lente cumple $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$. Despeje $f$ y simplifique la fracción resultante.
**Solución:** Sumamos las fracciones: $\frac{1}{f} = \frac{d_i+d_o}{d_o \cdot d_i}$.
Para despejar $f$, invertimos ambas fracciones (propiedad de proporciones): $f = \frac{d_o d_i}{d_o+d_i}$.

## Aplicación 2: Rutas y Velocidad Media

**Contexto:** Un bus viaja a Abancay a velocidad $v_1$ y retorna a velocidad $v_2$. La velocidad media es $v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$. Simplifique.
**Solución:** Resolvemos el denominador: $\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} = \frac{v_2+v_1}{v_1 v_2}$.
Aplicamos división de complejos: $v_m = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{v_1+v_2}{v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1+v_2}$.

## Aplicación 3: Costo Medio de Producción

**Contexto:** En *misdulcecitos.com*, el costo total de $x$ pasteles es $C(x) = 500 + 10x$. El costo medio es $\bar{C} = \frac{C(x)}{x}$. Si se producen $x + 5$ pasteles, exprese el nuevo $\bar{C}$.
**Solución:** Reemplazamos $x$ por $x + 5$:
$\bar{C}_{nuevo} = \frac{500+10(x+5)}{x+5} = \frac{500+10x+50}{x+5} = \frac{10x+550}{x+5}$.

## Aplicación 4: Trabajo Compartido

**Contexto:** Una tubería llena un tanque en $x$ horas y otra en $x + 2$ horas. La porción llena por hora es $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$. Simplifique.
**Solución:** MCM es $x(x + 2)$.
Sumamos: $\frac{(x+2)+x}{x(x+2)} = \frac{2x+2}{x^2+2x}$.

## Aplicación 5: Análisis de Circuitos

**Contexto:** Dos resistencias en paralelo equivalen a $R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}$. Si $R_1 = x$ y $R_2 = x^2$, halle $R_T$ simplificada.
**Solución:** Denominador: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$. El MCM es $x^2$. Suma: $\frac{x+1}{x^2}$.
Invertimos para $R_T$: $R_T = \frac{x^2}{x+1}$.

# Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos algebraicos.

1. ¿Por qué la simplificación de $\frac{x^2+4}{x+2}$ NO es $x + 2$? ¿Qué error conceptual se comete al afirmar eso?

2. Al calcular $\frac{x}{x-3} + \frac{2}{3-x}$, ¿cómo puede usar la propiedad de signos para evitar buscar un MCM complejo?

3. Explique por qué el dominio de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ no incluye a $x = 1$, a pesar de que la función simplificada es $x + 1$.

4. Si multiplicamos numeradores y denominadores cruzados para sumar fracciones ($\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$), ¿siempre obtenemos el denominador más simple posible? Justifique.

5. ¿Qué diferencia algorítmica existe entre multiplicar dos fracciones y dividir dos fracciones algebraicas?

6. Analice la expresión $\frac{1/x}{1/y}$. Demuestre usando propiedades de fracciones por qué esto es equivalente a $\frac{y}{x}$.

7. ¿Por qué es fundamental factorizar los polinomios *antes* de hallar el Mínimo Común Múltiplo de los denominadores?

8. Dé un contraejemplo numérico que demuestre que $\frac{a}{b+c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$.

9. Al simplificar $\frac{x^3-8}{x-2}$, el resultado es un polinomio cuadrático. ¿Puede este polinomio resultante volver a factorizarse en los números reales?

10. En una fracción compleja, ¿por qué es válido multiplicar el numerador principal y el denominador principal por el MCM de todos los denominadores "pequeños¿

# Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

## Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** Simplifique la fracción: $\frac{2x^2+6x}{4x^2-36}$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Factoriza factor común en el numerador:
$2x(\underline{\hspace{4cm}})$

2. Factoriza factor común y luego diferencia de cuadrados en el denominador:
$4(x^2-9) = 4(\underline{\hspace{3cm}})(\underline{\hspace{3cm}})$

3. Cancela los factores repetidos y simplifica coeficientes:
Respuesta final: ____________________

**Problema 2.** Efectúe la resta: $\frac{3x}{x-2} - \frac{12}{x^2-4}$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Encuentra el MCM factorizando denominadores:
El MCM es $(\underline{\hspace{3cm}})(\underline{\hspace{3cm}})$

2. Amplifica la primera fracción y resta los numeradores:
$\frac{3x(\underline{\hspace{3cm}})-12}{x^2-4} = \frac{\underline{\hspace{6cm}}}{x^2-4}$

3. Factoriza el nuevo numerador y simplifica la fracción:
Respuesta final: ____________________

**Problema 3.** Simplifique la fracción compleja: $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Resta el numerador principal usando MCM $ab$:
Numerador $= \frac{\underline{\hspace{4cm}}}{ab}$

2. Suma el denominador principal usando MCM $ab$:
Denominador $= \frac{\underline{\hspace{4cm}}}{ab}$

3. Divide (cancela $ab$) y factoriza la diferencia de cuadrados para simplificar:
Respuesta final: ____________________

## Problemas Generales

**Problema 4.** Simplifique: $\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

**Problema 5.** Multiplique: $\frac{m^2-n^2}{m^2+mn} \cdot \frac{m}{m-n}$.

**Problema 6.** Divida: $\frac{x^3+8}{x^2-4} \div \frac{x^2-2x+4}{x-2}$.

**Problema 7.** Sume: $\frac{2}{x+3} + \frac{4}{x-3}$.

**Problema 8.** Reste: $\frac{a+1}{a-1} - \frac{a-1}{a+1}$.

**Problema 9.** Simplifique: $\frac{4y^2-12y}{2y^3-18y}$.

····▷
COMENTARIO
Las fracciones anidadas (fracciones dentro de fracciones) pueden resolverse multiplicando todo por el MCM global. ¡Es mucho más rápido que sumar piso por piso!

**Problema 10.** Fracción compleja: $\frac{x-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$.

**Problema 11.** Opere: $\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x^2+x}-\frac{1}{x^2-x}$.

**Problema 12.** Simplifique: $\frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6}\cdot\frac{x^2+4x+4}{x^2+8x+16}$.

**Problema 13.** Multiplique sacando el signo negativo: $\frac{x-5}{x^2-25}\cdot\frac{5-x}{x^2+x-30}$.

**Problema 14.** Simplifique: $\frac{1+\frac{2}{y-1}}{\frac{y^2+y}{y^2-1}}$.

**Problema 15.** Reste: $\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{1}{x-y}$.

**Problema 16.** Fracción compleja de 3 niveles: $\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$.

**Problema 17.** Simplifique: $\frac{ax+ay+bx+by}{a^2-b^2} \div \frac{x+y}{a-b}$.

**Problema 18.** Efectúe: $\frac{x^2-16}{x^2-8x+16} \cdot \frac{x^2-4x}{x^2+4x} - 1$.

**Problema 19.** Sume: $\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+5x+6}$.

**Problema 20.** Simplifique totalmente la mega fracción: $\frac{\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}}{\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}}$.

# Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

## Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** En termodinámica, la eficiencia es $\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h}$. Exprese $\eta$ como una sola fracción algebraica.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Halla el denominador común:
MCM = ___________

2. Convierte el 1 a fracción:
$1 = \frac{\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_}$

3. Resta los numeradores:
Respuesta: ________________

**Problema 2.** El servidor de *matematicasmedicina.com* procesa datos a tasa $\frac{1}{t-1}$. Un módulo extra aporta $\frac{1}{t+1}$. Sume las tasas.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Determina el MCM de los denominadores:
MCM = (___________)(___________)

2. Multiplica en cruz para sumar:
$\frac{(t+1)+(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)}{t^2-1}$

3. Simplifica el numerador:
Respuesta: ________________

**Problema 3.** El costo unitario del *Atún Primor* en un pack es $C = \frac{100}{x}$. Si compras $x - 2$ latas, la diferencia de costo es $\frac{100}{x-2} - \frac{100}{x}$. Opere.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Escribe la resta amplificada:
$\frac{100x-100(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)}{x(x-2)}$

2. Desarrolla el numerador:
$100x - 100x +$ ___________

3. Escribe el resultado final:
Respuesta: ________________

## Problemas Generales

**Problema 4.** KFC tiene pedidos en un tiempo base $\frac{t^2-9}{t-3}$. Simplifique la fracción para obtener el modelo de tiempo real.

**Problema 5.** La mezcla de un batido en una licuadora Ninja es $\frac{x}{x+y}$. Si duplicamos los ingredientes, demuestre que la proporción se mantiene constante simplificando.

**Problema 6.** Rappi Pro minimiza el tiempo de espera evaluando $T = \frac{d^2+d}{d} - \frac{d^2-1}{d-1}$. Simplifique para hallar el retraso constante.

**Problema 7.** En un proyecto IB de Newton College, el ratio de volúmenes es $\frac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$. Simplifique la fracción compleja resultante.

**Problema 8.** Para la Universidad de Lima, la función de costo promedio marginal es $\frac{\frac{2}{x}-\frac{2}{x+h}}{h}$. Simplifique eliminando la $h$ del denominador.

**Problema 9.** PUCP requiere calcular tolerancias de peso $\frac{w^2-25}{w^2-10w+25}$. Simplifique la expresión para ingenieros estructurales.

**Problema 10.** En *clasesvirtuales.net*, la banda ancha se divide como $\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$. Sume las fracciones para obtener la señal total requerida.

**Problema 11.** Un simulacro de Admisión Villarreal usa el ratio de aciertos $\frac{a^3+8}{a+2}$. Factorice y simplifique la métrica de evaluación.

**Problema 12.** El hijo del dueño de un hotel modela la ganancia diaria $G = \frac{x^2-1}{x} \div \frac{x+1}{x^2}$. Halle la función de ingreso lineal.

**Problema 13.** La distancia hiperfocal de una cámara fotográfica se aproxima con la fracción compleja $H = \frac{f^2}{N \cdot \frac{c}{1000}}$. Simplifique.

**Problema 14.** Capacitancias en serie obedecen $\frac{1}{C_T} = \frac{1}{c} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{3c}$. Resuelva y despeje $C_T$.

**Problema 15.** Una solución química reduce su concentración según la resta $\frac{c}{v} - \frac{c}{v+5}$. Exprese el decaimiento como un único término.

**Problema 16.** En dinámica de fluidos, la pérdida de carga de una tubería relaciona áreas: $\left(\frac{A_1 - A_2}{A_1 A_2}\right)^2$. Expréselo separando términos internos.

**Problema 17.** El flujo vehicular en un puente se rige por la división $\frac{v^2-4v}{v} \div \frac{v^2-16}{v+4}$. Simplifique el flujo por carril.

**Problema 18.** Una impresora escolar despacha guías a velocidad $\frac{p^2-p-2}{p-2}$. Factorice para hallar la tasa efectiva por segundo.

**Problema 19.** La relación orbital de dos satélites es $\frac{r^3-1}{r-1} - \frac{r^3+1}{r+1}$. Simplifique usando fórmulas de cubos para encontrar el parámetro orbital.

**Problema 20.** En series armónicas de audio, el desfase se modela como $\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n^2+n}}$. Simplifique para revelar que la serie es equivalente a 1.

# Claves de Respuestas

### Propuestos Matemáticos

1. $\frac{x}{2(x-3)}$
2. $\frac{3x}{x+2}$
3. $a-b$
4. $\frac{x-3}{x+2}$
5. 1
6. 1
7. $\frac{6x+6}{(x+3)(x-3)}$
8. $\frac{4a}{(a-1)(a+1)}$
9. $\frac{2}{y+3}$
10. $x-1$
11. $-\frac{1}{x(x^2-1)}$
12. $\frac{x+2}{x+4}$
13. $-\frac{1}{(x+5)(x+6)}$
14. $\frac{1}{y}$
15. $\frac{1}{x+y}$
16. $\frac{x+1}{x+2}$
17. 1
18. 0
19. $\frac{2}{(x+1)(x+3)}$
20. 1

### Propuestos de Aplicación

1. $\frac{T_h-T_c}{T_h}$
2. $\frac{2t}{t^2-1}$
3. $\frac{200}{x(x-2)}$
4. $t+3$
5. $\frac{2x}{2x+2y}=\frac{x}{x+y}$
6. 0 (Ambos términos dan $d+1$)
7. 3
8. $\frac{2}{x(x+h)}$
9. $\frac{w+5}{w-5}$
10. $\frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}$
11. $a^2-2a+4$
12. $x^2-x$
13. $\frac{1000f^2}{Nc}$
14. $C_T=\frac{6c}{11}$
15. $\frac{5c}{v(v+5)}$
16. $(\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_1})^2$
17. 1
18. $p+1$
19. $2r$
20. 1

# ¡Llegaste al Final!

'El álgebra es solo un juego de simplificar el caos. Aprende las reglas, respeta los denominadores, y todo encajará perfectamente.'

- Tu futuro matemático

¡Sigue dominando el álgebra, fracción a fracción! El cálculo superior te espera.

**Prof. Teófilo Teves**

**www.teoteves.com**