PRECÁLCULO

EXPONENTES Y RADICALES

CUADERNO DE TRABAJO

Leyes, Simplificación y Modelado

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Exponentes Enteros y Racionales

Los exponentes son el lenguaje algebraico para representar multiplicaciones repetidas y procesos de crecimiento y decaimiento. Un dominio absoluto de sus leyes es crucial para el cálculo superior.

Para cualquier número real $a, b \neq 0$ y enteros m, n:

- **Producto de bases iguales:** $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- **Cociente de bases iguales:** $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- **Potencia de una potencia:** $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- **Potencia de un producto y cociente:** $(ab)^n = a^n b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- **Exponente Cero:** $a^0 = 1 \quad$ (Ojo: 0^0 es una forma indeterminada).
- **Exponente Negativo:** $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad$ y $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Si m, n son enteros con $n > 1$, definimos el exponente fraccionario como la equivalencia de un radical:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Advertencia de Dominio: Si n es par, entonces a debe ser no negativo ($a \geq 0$) para que la expresión sea un número real.

Además, es vital recordar que $\sqrt{x^2} = |x|$ para proteger el signo en raíces pares.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1 (Simplificación Múltiple)

Enunciado: Simplifique la expresión eliminando exponentes negativos: $\left(\frac{3x^{-2}y^3}{6x^4y^{-1}}\right)^{-2}$

Solución: Primero, simplificamos el interior del paréntesis:
$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{x^{-2}}{x^4} = x^{-2-4} = x^{-6}, \quad \frac{y^3}{y^{-1}} = y^{3-(-1)} = y^4.$

La expresión queda: $\left(\frac{y^4}{2x^6}\right)^{-2}$.

Aplicamos el exponente negativo invirtiendo la fracción: $\left(\frac{2x^6}{y^4}\right)^2$.

Finalmente, elevamos al cuadrado: $\frac{4x^{12}}{y^8}$.

COMENTARIO

¡Hola, chicos y chicas! Simplificar exponentes es como ordenar su cuarto: agrupen lo que es igual y eliminen lo que sobra. ¡Les salvará en derivadas!

COMENTARIO

¡CUIDADO! Un error muy común es pensar que $(a+b)^n = a^n + b^n$. ¡Eso es falso! El exponente **no** se distribuye en sumas ni restas.

COMENTARIO

Cuando vean una raíz, escríbanla inmediatamente como exponente fraccionario ($1/n$). Las reglas de las fracciones se aplican directo y es mucho más limpio visualmente.

Problema Resuelto 2 (Exponentes Racionales Complejos)

Enunciado: Evalúe sin usar calculadora: $81^{-0{,}75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-4/3}$
Solución: Convertimos los decimales a fracciones y reescribimos con bases primas:
$81 = 3^4$ y $-0{,}75 = -3/4$. Entonces $(3^4)^{-3/4} = 3^{-3} = \frac{1}{27}$.
Para el segundo término: $\left(\frac{1}{27}\right)^{-4/3} = 27^{4/3} = (3^3)^{4/3} = 3^4 = 81$.
Suma total: $\frac{1}{27} + 81 = \frac{2188}{27}$.

···· ▷ COMENTARIO
Recuerden transformar decimales como 0,75 a 3/4. Las bases primas $(2, 3, 5)$ son sus mejores amigas para simplificar rápído.

Problema Resuelto 3 (Radicales Anidados)

Enunciado: Simplifique expresando como una sola potencia de x: $\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}$
Solución: Convertimos desde adentro hacia afuera usando exponentes fraccionarios:
Interior: $x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{1/2} = x^{3/2}$.
Siguiente capa: $\sqrt[3]{x^{3/2}} = (x^{3/2})^{1/3} = x^{1/2}$.
Capa exterior: $\sqrt{x \cdot x^{1/2}} = \sqrt{x^{3/2}} = (x^{3/2})^{1/2} = x^{3/4}$.

Problema Resuelto 4 (Ecuación Exponencial Básica)

Enunciado: Resuelva para x: $4^{x+1} \cdot 8^{x-1} = 16^{2x}$
Solución: Expresamos todo en base 2:
$(2^2)^{x+1} \cdot (2^3)^{x-1} = (2^4)^{2x} \implies 2^{2x+2} \cdot 2^{3x-3} = 2^{8x}$.
Sumamos exponentes en la multiplicación: $2^{5x-1} = 2^{8x}$.
Igualamos exponentes: $5x - 1 = 8x \implies -1 = 3x \implies x = -1/3$.

···· ▷ COMENTARIO
Si la incógnita está en el exponente, ¡fuercen a que las bases sean idénticas a ambos lados de la ecuación!

Problema Resuelto 5 (Racionalización Avanzada)

Enunciado: Racionalice el denominador y simplifique: $\frac{x-y}{x^{1/2}+y^{1/2}}$
Solución: Reconocemos que el numerador es una diferencia de cuadrados:
$x - y = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = (x^{1/2} - y^{1/2})(x^{1/2} + y^{1/2})$.
Reescribimos la fracción: $\frac{(x^{1/2}-y^{1/2})(x^{1/2}+y^{1/2})}{x^{1/2}+y^{1/2}}$.
Cancelamos términos (asumiendo $x^{1/2} + y^{1/2} \neq 0$): $x^{1/2} - y^{1/2}$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Interés Compuesto

Contexto: Un capital de \$5000 se invierte a una tasa anual del 6 % compuesta continuamente. Usando la fórmula $A = Pe^{rt}$, halle el monto después de 10 años. ($e^{0,6} \approx 1{,}822$).
Solución: Reemplazamos: $A = 5000 \cdot e^{0,06 \cdot 10} = 5000 \cdot e^{0,6}$.
Calculando: $A = 5000 \cdot 1{,}822 = 9110$. El monto será de \$9,110.

····▷
COMENTARIO
La constante e es la base del crecimiento natural continuo. Lo verán muchísimo en modelado.

Aplicación 2: Escalamiento de Recetas

Contexto: En *misdulcecitos.com*, el volumen de masa para pasteles temáticos sigue la ley $V = k \cdot r^3$. Si un pastel de radio 10cm usa 2kg de masa, ¿cuántos kg usará uno de 15cm?
Solución: Relación de volúmenes: $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = \left(\frac{15}{10}\right)^3 = (1{,}5)^3 = 3{,}375$.
Masa nueva: $2 \cdot 3{,}375 = 6{,}75$ kg.

Aplicación 3: Desintegración Radiactiva

Contexto: El isótopo de Carbono-14 tiene una vida media de 5730 años. La cantidad restante es $N(t) = N_0(1/2)^{t/5730}$. ¿Qué fracción de N_0 queda tras 11460 años?
Solución: $t = 11460$. El exponente es $11460/5730 = 2$.
Queda: $N_0(1/2)^2 = N_0(1/4)$. Solo queda $1/4$ del original.

Aplicación 4: Crecimiento Poblacional

Contexto: Una colonia de bacterias triplica su población cada 4 horas. Si inicialmente hay 100 bacterias, exprese la población P en función del tiempo t en horas y halle P tras 12h.
Solución: El modelo es $P(t) = 100 \cdot 3^{t/4}$.
Para $t = 12$: $P(12) = 100 \cdot 3^{12/4} = 100 \cdot 3^3 = 100 \cdot 27 = 2700$.

Aplicación 5: Ley de Kepler

Contexto: El tiempo T (en años) que tarda un planeta en orbitar el sol y su distancia media R (en UA) cumplen $T^2 = R^3$. Si Júpiter está a 5,2 UA, ¿cuánto dura su año?
Solución: Despejamos T: $T = R^{3/2} = (5{,}2)^{1,5}$.
Calculando: $T \approx \sqrt{140{,}6} \approx 11{,}86$ años terrestres.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responde conceptualmente argumentando matemáticamente.

1. ¿Por qué definimos matemáticamente que $a^0 = 1$ para $a \neq 0$? Demuéstrelo usando la ley del cociente.

2. ¿Es la expresión $(-2)^4$ equivalente a -2^4? Justifique su respuesta con el orden de las operaciones.

3. Explique por qué el dominio de la función $f(x) = x^{1/2}$ está restringido a $x \geq 0$ en los reales, pero $f(x) = x^{1/3}$ no.

4. Si se tiene $(x + y)^{-1}$, ¿por qué es incorrecto escribir $x^{-1} + y^{-1}$? Dé un contraejemplo numérico.

5. ¿Qué diferencia profunda existe entre evaluar $a^{m/n}$ como $\sqrt[n]{a^m}$ versus $(\sqrt[n]{a})^m$? ¿En qué casos una forma es más útil que la otra?

6. Si un número real positivo muy pequeño se eleva a un exponente negativo grande, ¿el resultado es cercano a cero o muy grande? ¿Por qué?

7. Analice la expresión $\sqrt{x^2}$. ¿Bajo qué condición estricta podemos afirmar que $\sqrt{x^2} = x$?

8. Si la base b de un exponente b^x está en el intervalo $(0, 1)$, ¿la función es creciente o decreciente? Justifique.

9. ¿Cómo usaría las propiedades de los exponentes para explicar el funcionamiento de la notación científica en una multiplicación?

10. ¿Por qué la base de un logaritmo (que es el exponente inverso) no puede ser 1?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Simplifique la expresión: $(2x^3y^{-2})^4$

Guía de Solución Interactiva

1. Distribuye el exponente 4 a cada factor (coeficiente y variables):
$2^{\_\_\_\_} \cdot (x^3)^{\_\_\_\_} \cdot (y^{-2})^{\_\_\_\_}$

2. Multiplica los exponentes (Potencia de potencia):
$16 \cdot x^{\_\_\_\_} \cdot y^{\_\_\_\_}$

3. Reescribe para eliminar el exponente negativo:
$\frac{\_\_\_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_\_\_}$

Problema 2. Simplifique: $\sqrt[3]{27a^6b^9c^{-3}}$

Guía de Solución Interactiva

1. Convierte la raíz cúbica a un exponente fraccionario para todo:
$(27a^6b^9c^{-3})^{\_\_\_\_\_\_}$

2. Aplica el exponente a cada término (recuerda que $27 = 3^3$):
$3^{3\cdot\frac{1}{3}}a^{\_\_\_\_\_\_}b^{\_\_\_\_\_\_}c^{\_\_\_\_\_\_}$

3. Simplifica y deja con exponentes positivos:
$\frac{\_\_\_\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_\_\_\_}$

Problema 3. Halle x en la ecuación: $9^{x-2} = 27^{x+1}$

Guía de Solución Interactiva

1. Expresa ambas bases (9 y 27) como potencias de 3:
$(3^2)^{x-2} = (3^{\_\_\_\_})^{x+1}$

2. Multiplica exponentes e iguala las nuevas expresiones de los exponentes:
$2x - 4 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

3. Resuelve la ecuación lineal para x:
$x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Problemas Generales

Problema 4. Evalúe numéricamente: $(-8)^{2/3} + (-32)^{4/5}$.

Problema 5. Simplifique eliminando exponentes negativos: $\frac{(a^{-2}b^3)^{-1}}{a^4b^{-2}}$.

Problema 6. Reduzca a una sola raíz: $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$.

Problema 7. Resuelva para x: $2^x \cdot 5^x = 1000$.

Problema 8. Factorice usando el menor exponente común: $x^{-3/2} - x^{-1/2}$.

Problema 9. Simplifique completamente: $\left(\frac{16x^{-4}y^8}{81x^8y^{-4}}\right)^{-1/4}$.

Problema 10. Demuestre algebraicamente si $(x^{-1} + y^{-1})^{-1} = \frac{xy}{x+y}$.

COMENTARIO

Revisen bien sus signos al pasar términos de un lado a otro. El 90 % de los errores son sumas y restas básicas, ¡no el álgebra avanzada!

Problema 11. Halle x en: $\sqrt[x-1]{a^{x+2}} = \sqrt[x]{a^{x+4}}$ (asuma $a > 0, a \neq 1$).

Problema 12. Racionalice el numerador: $\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

Problema 13. Si $x^x = 3$, halle el valor de x^{2x+1}.

Problema 14. Simplifique: $\sqrt[n]{\frac{4^n+2^n}{2^{-n}+4^{-n}}}$.

Problema 15. Resuelva el sistema: $3^x \cdot 2^y = 72 \quad \text{y} \quad 3^{x-1} \cdot 2^{y+1} = 48$.

Problema 16. Evalúe la suma infinita encadenada: $x = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}$

Problema 17. Exprese en notación científica y evalúe: $\frac{(3\cdot 10^{-5})(8\cdot 10^{9})}{6\cdot 10^{-3}}$.

Problema 18. Simplifique asumiendo $x < 0, y > 0$: $\sqrt{x^2y^4}$.

Problema 19. Halle n si: $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 56$.

Problema 20. Resuelva para x: $x^{-2/3} = 4/9$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Una inversión crece según $M = P(1+r)^t$. Si se invierten \$100 al 5 % anual, ¿cuánto habrá al cabo de 2 años?

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica los valores: $P = 100$, $r = 0{,}05$, $t = 2$. Sustituye:
$M = 100(1 + \_\_\_\_\_\_\_\_)^{\_\_\_\_}$

2. Suma dentro del paréntesis:
$M = 100(\_\_\_\_\_\_\_\_)^2$

3. Eleva al cuadrado y multiplica para hallar el monto total:
$M = \_\_\_\_\_\_\_\_$

Problema 2. El área superficial de un cubo es $A = 6L^2$. Despeje el lado L en función de A usando exponentes fraccionarios.

Guía de Solución Interactiva

1. Divide la ecuación por 6:
$L^2 = \frac{A}{\_\_\_\_\_\_\_\_}$

2. Aplica la raíz cuadrada a ambos lados (exponente 1/2):
$(L^2)^{1/2} = \left(\frac{A}{6}\right)^{\_\_\_\_\_\_\_\_}$

3. Simplifica para obtener L:
$L = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Problema 3. Un analgésico en la sangre disminuye un 20 % cada hora. Si la dosis inicial es 50mg, modele la cantidad restante $C(t)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Si disminuye 20 %, queda el 80 %. Expresa 80 % como decimal:
Base de decaimiento $b = \_\_\_\_\_\_\_\_$

2. Identifica la cantidad inicial C_0:
$C_0 = \_\_\_\_\_\_\_\_$

3. Arma la función exponencial $C(t) = C_0 \cdot b^t$:
$C(t) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Problemas Generales

Problema 4. Una piscina cúbica se amplía duplicando su arista. ¿En qué factor aumenta su volumen de retención de agua?

Problema 5. La depreciación de un servidor informático sigue $V(t) = 3000(0{,}8)^t$. Calcule su valor residual tras 3 años de uso.

Problema 6. El nivel de intensidad acústica depende de proporciones logarítmicas, pero la energía disipada va como $E = E_0 10^{d/10}$. Si $d = 20$, ¿cuál es el factor de aumento?

Problema 7. Una máquina imprime 2^x folletos por minuto. Si trabajó durante 2^y minutos, halle la expresión del total de folletos impresos.

Problema 8. En óptica, la intensidad de luz al pasar por filtros cae como $I = I_0(1/4)^n$. Tras cuántos filtros la luz es $1/64$ de la inicial?

Problema 9. El peso de un dinosaurio modelado bio-mecánicamente es $W \propto L^{2{,}8}$. Si un ejemplar es 10 veces más largo que otro, aproxime el aumento de su peso.

Problema 10. Un cultivo fungoso duplica su área cada semana. Si hoy ocupa 5 cm^2, ¿qué área ocupará luego de un mes (4 semanas)?

Problema 11. La magnitud sísmica libera energía $E \propto 10^{1,5M}$. ¿Cuánta más energía libera un terremoto de magnitud 7 comparado con uno de magnitud 5?

Problema 12. La ley empírica de enfriamiento en un recipiente aislado térmicamente es $T(t) = 20 + 80(0{,}5)^{t/10}$. Halle la temperatura en $t = 20$ minutos.

Problema 13. Se pliega un papel a la mitad sucesivamente. Exprese el grosor total tras N pliegues si la hoja original mide 0,1 mm.

Problema 14. Un virus computacional infecta 3^d máquinas el día d. ¿En qué día habrá exactamente 243 computadoras comprometidas en la red?

Problema 15. Una galaxia se aleja con velocidad proporcional a su distancia $v = H_0 \cdot D$. Si expresamos H_0 en s^{-1}, verifique dimensionalmente el exponente de la distancia.

Problema 16. Al diseñar una caja, su volumen máximo es $V = (x^{1/3})^6$. Reduzca esta ecuación de diseño para hallar la fórmula del volumen en función de x.

Problema 17. Si un material fotorreceptor incrementa su eficiencia siguiendo $E(x) = x^{3/2}$, determine la eficiencia cuando la intensidad lumínica x es 16 unidades.

Problema 18. La vida media de un fármaco es 2 horas. Si se inyectan 800mg, ¿cuánto medicamento activo persiste luego de 8 horas en el paciente?

Problema 19. La resistencia aerodinámica varía con el cuadrado de la velocidad: $R \propto V^2$. Si se triplica la velocidad del vehículo, ¿cómo cambia la resistencia?

Problema 20. Una cuenta de ahorros ofrece interés continuo. Si el saldo se duplica en 10 años, exprese la constante de crecimiento k usando notación logarítmica o radical.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $\frac{16x^{12}}{y^8}$
2. $\frac{3a^2b^3}{c}$
3. $x = -7$
4. $4 + 16 = 20$
5. $\frac{1}{a^2b}$
6. $2^{7/8} = \sqrt[8]{128}$
7. $x = 3$
8. $x^{-3/2}(1 - x)$
9. $\frac{3x^3}{2y^3}$
10. Sí, es una identidad correcta.
11. $x = 2$
12. $\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$
13. $9x$
14. 8
15. $x = 2, y = 3$
16. $x = 3$
17. $4 \cdot 10^7$
18. $-xy^2$
19. $n = 3$
20. $x = \pm 27/8$

Propuestos de Aplicación

1. \$110.25
2. $L = (A/6)^{1/2}$
3. $C(t) = 50(0{,}8)^t$
4. Aumenta en un factor de 8 (2^3).
5. \$1536
6. Factor de 100 (10^2).
7. 2^{x+y} folletos
8. $n = 3$ filtros
9. $10^{2{,}8} \approx 630{,}9$ veces
10. 80 cm^2
11. $10^3 = 1000$ veces más
12. 40°C
13. $0{,}1 \cdot 2^N$ mm
14. Día 5
15. Distancia D tiene exponente 1.
16. $V = x^2$
17. 64 unidades
18. 50 mg
19. Aumenta por un factor de 9.
20. $e^{10k} = 2 \implies k = \ln(2)/10$.

¡Llegaste al Final!

'El crecimiento no es lineal, es exponencial. Domina las bases hoy, y tus límites desaparecerán mañana.'

- Tu futuro yo

¡Sigue modelando el mundo, ecuación a ecuación! El cálculo avanzado te espera.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com