CÁLCULO DE UNA VARIABLE

TEOREMA DEL SÁNDWICH

CUADERNO DE TRABAJO

Límites por Acotación y Encaje

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Arte de Acotar

Existen funciones rebeldes, como $\sin(1/x)$, que oscilan violentamente cerca de cero. No podemos aplicar las leyes de los límites tradicionales ni la sustitución directa. Para domesticar estas funciones, utilizamos el **Teorema del Sándwich** (también conocido como Teorema del Encaje o de Compresión).

PROFE TEO

¡El truco está en construir la desigualdad desde el centro hacia afuera! Empieza con una función trigonométrica que sepas que está atrapada entre -1 y 1.

1. Enunciado Formal del Teorema

Sean f, g y h funciones tales que:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para todo x en un intervalo abierto que contenga a a (excepto posiblemente en a). Si se cumple que:

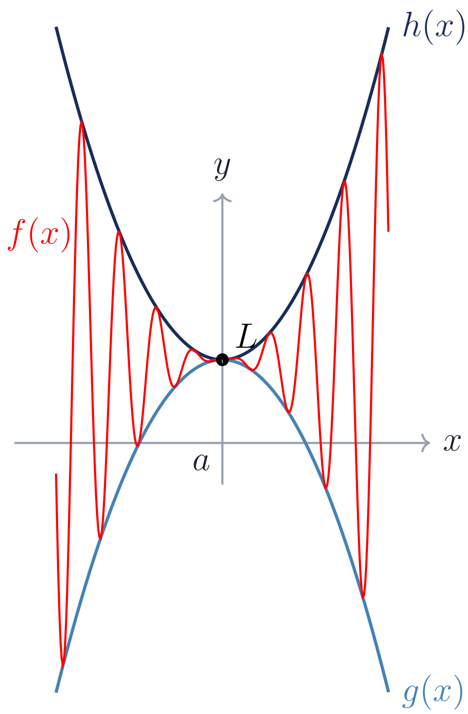
$$\lim_{x \to a} g(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} h(x) = L$$

Entonces, obligatoriamente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

2. Demostración Gráfica

Visualmente, si la función $f(x)$ está *atrapada* entre un "pan superior"$h(x)$ y un "pan inferior"$g(x)$, y ambos panes se aplastan hacia el mismo punto L cuando $x \to a$, el relleno $f(x)$ no tiene más remedio que pasar por ese mismo punto.



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: El Clásico Oscilante

Enunciado: Calcule $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
Solución: 1. Partimos del hecho de que el seno siempre está acotado: $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$.
2. Multiplicamos todo por x^2. Como $x^2 \geq 0$, la desigualdad no cambia: $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$.
3. Tomamos límites en los extremos: $\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0}(x^2) = 0$.
Conclusión: Por el Teorema del Sándwich, $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

PROFE TEO
Cuidado al multiplicar una desigualdad por x. Si x es negativo, ¡los signos de la desigualdad se voltean! Por eso a menudo usamos $|x|$ o x^2.

Problema Resuelto 2: Límite al Infinito

Enunciado: Determine $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos(2x)}{x^3}$.
Solución: Sabemos que $-1 \leq \cos(2x) \leq 1$. Dividimos entre x^3. Para $x \to \infty$, $x^3 > 0$, así que la desigualdad se mantiene:

$$-\frac{1}{x^3} \leq \frac{\cos(2x)}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

Evaluamos los límites laterales externos al infinito: $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^3}\right) = 0$ y $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0$. Por lo tanto, el límite central es 0.

PROFE TEO
Cualquier función trigonométrica como cos(monstruo) siempre estará entre -1 y 1. ¡Esa es tu llave de apertura!

Problema Resuelto 3: Exponenciales y Trigonométricas

Enunciado: Evalúe $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}e^{\cos(\pi/x)}$.
Solución: Acotamos el exponente: $-1 \leq \cos(\pi/x) \leq 1$. Como la función exponencial de base e es creciente, aplicamos e a la desigualdad:

$$e^{-1} \leq e^{\cos(\pi/x)} \leq e^1$$

Multiplicamos por $\sqrt{x}$ (positivo por el límite por la derecha):

$$\frac{\sqrt{x}}{e} \leq \sqrt{x}e^{\cos(\pi/x)} \leq e\sqrt{x}$$

Los extremos tienden a cero cuando $x \to 0^+$. El límite es 0.

Problema Resuelto 4: Uso del Valor Absoluto

Enunciado: Demuestre que $\lim_{x\to 0} x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$.
Solución: Usamos una propiedad alternativa: $0 \leq \left|x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right)\right|$. Como $|\cos(\theta)| \leq 1$, entonces:

$$0 \leq \left|x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| \leq x^4(1)$$

$$0 \leq \left|x^4 \cos\left(\frac{2}{x}\right)\right| \leq x^4$$

Al aplicar límite $x \to 0$, los extremos van a 0. Si el valor absoluto de una función tiende a 0, la función sin valor absoluto también tiende a 0.

Problema Resuelto 5: Función Máximo Entero

Enunciado: Calcule $\lim_{x\to 0} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
Solución: Por definición: $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x}$. Si analizamos $x \to 0^+$, multiplicamos por $x > 0$: $1 - x < x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$. Extremos tienden a 1. Si analizamos $x \to 0^-$, multiplicamos por $x < 0$ (la desigualdad se invierte): $1 - x > x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1$. Extremos tienden a 1. En ambos casos laterales, el límite es 1.

PROFE TEO
La función Máximo Entero $\lfloor x \rfloor$ siempre cumple que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. ¡Memoriza esto para límites avanzados!

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Amortiguación Oscilatoria

Contexto: Una partícula subatómica oscila mientras su amplitud decae según la ecuación de posición $P(t) = e^{-t}\sin(10t)$ micras. Verifique matemáticamente la posición límite estabilizada de dicha partícula cuando el tiempo físico transcurrido se proyecta inexorablemente hacia el infinito absoluto.
Solución: Acotamos: $-1 \leq \sin(10t) \leq 1$. Multiplicamos por el atenuador positivo e^{-t}: $-e^{-t} \leq P(t) \leq e^{-t}$. Límites: $\lim_{t\to\infty}(\pm e^{-t}) = 0$. **Respuesta:** La partícula se detiene en 0 micras.

Aplicación 2: Fluctuación de Voltaje

Contexto: Un circuito integrado experimenta un rizado de tensión descrito por $V(s) = 5 + s^2\cos(1/s)$ voltios. Determine la tensión nominal exacta que recibe el microprocesador asumiendo que el ruido estocástico del factor s tiende a eliminarse llegando a cero.
Solución: Analizamos el rizado: $-s^2 \leq s^2\cos(1/s) \leq s^2$. Cuando $s \to 0$, el rizado es 0. Sumamos la constante nominal: $V = 5+0$. **Respuesta:** La tensión estabilizada es exactamente 5 voltios.

PROFE TEO

En física, el Teorema del Sándwich modela a la perfección sistemas reales: fricción, resistencia del aire o atenuación de señales. ¡Es matemática aplicada pura!

Aplicación 3: Dinámica Poblacional

Contexto: Cierta colonia fúngica presenta estacionalidad reproductiva modelada temporalmente mediante $N(m) = 200 + \frac{\sin(\pi m)}{m}$ individuos. Compruebe la cantidad asintótica poblacional proyectada por este ecosistema si el conteo de meses estudiados m se extiende perpetuamente sin límites estadísticos.
Solución: Acotamos el factor variante: $-1/m \leq \frac{\sin(\pi m)}{m} \leq 1/m$. Como $m \to \infty$, los extremos tienden a 0. Población límite: $200 + 0 = 200$. **Respuesta:** Se estabilizará en 200 individuos asintóticamente.

Aplicación 4: Desgaste Pendular

Contexto: El ángulo de deflexión rítmica de un péndulo magnetizado amortiguado por corrientes de Eddy arroja una fórmula $\theta(t) = \frac{\cos(4t)}{\sqrt{t}}$ radianes. Evalúe el ángulo final estático que alcanzará el instrumento de medición al prolongar su funcionamiento analítico hacia el infinito.
Solución: La oscilación $-\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{\cos(4t)}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}}$. Al evaluar $t \to \infty$, ambos sándwiches fraccionarios colapsan en 0. **Respuesta:** El péndulo quedará estático en 0 radianes (posición vertical).

Aplicación 5: Precisión Algorítmica

Contexto: Un código criptográfico presenta una desviación de entropía calculada por $E(x) = x^6 \sin(e^x/x)$ bits de error. Compruebe si este diseño de cifrado garantiza un nivel de vulnerabilidad residual nulo cuando el parámetro de inyección x converge algorítmicamente hacia cero absoluto.
Solución: El término seno siempre está acotado: $-1 \leq \sin(e^x/x) \leq 1$. Multiplicamos: $-x^6 \leq E(x) \leq x^6$. Con $x \to 0$, los extremos son 0. **Respuesta:** Sí, el margen de error límite es 0 bits.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Si al aplicar el teorema obtenemos que $\lim_{x\to a} g(x) = 2$ y $\lim_{x\to a} h(x) = 5$, ¿qué podemos concluir sobre el límite de la función central $f(x)$?
2. Explique por qué el Teorema del Sándwich no requiere que la función central $f(x)$ esté definida exactamente en el punto de evaluación $x = a$.
3. Durante una demostración, si multiplicamos la inecuación $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$ por x, ¿por qué es algebraicamente incorrecto asumir directamente que $-x \leq x\cos(1/x) \leq x$ sin analizar laterales?
4. ¿Por qué las funciones trigonométricas $\sin(u)$ y $\cos(u)$ son los "pilares"más comunes para construir desigualdades de encaje en cálculo?
5. Si se tiene que $0 \leq |f(x)| \leq g(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, demuestre verbalmente por qué esto garantiza que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
6. En el contexto de límites al infinito, justifique por qué $1/x$ se convierte en el "pan"perfecto para funciones como $\frac{\sin x}{x}$.
7. ¿Podría utilizarse el Teorema del Sándwich para calcular un límite que resulta ser infinito $(+\infty)$? Sustente su respuesta.
8. Analice la función $\tan(1/x)$. ¿Por qué resulta imposible usar el Teorema del Sándwich para hallar su límite cuando $x \to 0$ mediante acotación trigonométrica simple?
9. Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ es válido solo en el intervalo $(0, 0{,}5)$, ¿es esto suficiente para calcular el límite cuando $x \to 0^+$? ¿Por qué?
10. Un compañero intenta resolver $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ usando el Teorema del Sándwich acotando el numerador. Explique por qué este enfoque específico no produce un sándwich convergente.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule $\lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Acotamos la función trigonométrica: _____ $\leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq$ _____.
2. Multiplicamos por x^2 (que es positivo): _______ $\leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq$ _______.
3. Tomamos límites en los extremos: $\lim(-x^2) =$ _____ y $\lim(x^2) =$ _____. Por lo tanto, el límite es _____.

Problema 2. Halle $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x^3+1}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Sabemos que la base del sándwich es: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
2. Como $x \to \infty$, $x^3 + 1$ es positivo. Dividimos: $\frac{-1}{\_\_\_\_\_\_} \leq \frac{\sin(x)}{x^3+1} \leq \frac{1}{\_\_\_\_\_\_}$.
3. Los límites de los extremos cuando $x \to \infty$ son _____. El límite central es _____.

Problema 3. Determine $\lim_{x\to 0^+} x^3 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Acotamos el factor problema: $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq$ _____.
2. Al ser límite por la derecha, $x^3 > 0$. Multiplicamos sin cambiar la desigualdad: _____ $\leq x^3 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq$ _____.
3. Evaluando límites para $x \to 0^+$, los extremos dan _____. Límite final: _____.

PROFE TEO
Cuidado con las raíces cuadradas. El dominio obliga a que x sea positivo, por lo que te ahorras el dolor de cabeza de los signos negativos.

Problemas Generales

Problema 4. Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2}$.

Problema 5. Evalúe $\lim_{x \to 0} x^4 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$.

Problema 6. Determine $\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x} \cos\left(\frac{5}{x}\right)$.

Problema 7. Halle $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - \sin(2x)}{x^2 + 10}$.

Problema 8. Resuelva $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} e^{\sin(\pi/x)}$.

Problema 9. Encuentre el límite $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x + \sin x}{x - \cos x}$.

Problema 10. Calcule $\lim_{x \to 0} |x| \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$.

Problema 11. Halle $\lim_{x \to \infty} e^{-x} \cos x$.

Problema 12. Evalúe $\lim_{x \to 0} \left(x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 3\right)$.

Problema 13. Si $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$, halle $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Problema 14. Determine $\lim_{x\to 0} x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.

Problema 15. Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.

Problema 16. Evalúe $\lim_{x\to 0} \tan(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Problema 17. Si $1 \le f(x) \le 1 + x^2$, evalúe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Problema 18. Calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos^4(x)}{\sqrt{x}}$.

Problema 19. Determine $\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Problema 20. Halle analíticamente $\lim_{x\to 0} x^2 e^{\sin(1/x)}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un muelle oxidado pierde su elongación en centímetros modelando la función vibratoria $E(t) = e^{-t^2/4}\cos(5t)$. Proyecte matemáticamente la distensión residual asintótica tras incontables horas continuas de oscilación forzada del resorte mecánico.

Guía de Solución Interactiva

1. Acotamos el factor resonante: _____ $\leq \cos(5t) \leq$ _____. 2. Multiplicamos por la atenuación: __________ $\leq E(t) \leq$ __________. 3. Al evaluar $t \to \infty$, los extremos colapsan a _____ centímetros.

Problema 2. La corrección orbital de un satélite artificial sufre un sesgo de $D(x) = x^4 \sin(1/x^2)$ milímetros, por desajuste estelar x. Despeje la desviación final si los giroscopios reducen el desajuste algorítmicamente hacia cero.

Guía de Solución Interactiva

1. La perturbación oscilatoria es: $-1 \leq \sin(1/x^2) \leq 1$. 2. Se multiplica por la corrección: $-x^4 \leq D(x) \leq$ _____. 3. Al aplicar $\lim_{x\to 0}$, la desviación será exactamente _____ milímetros.

Problema 3. Una catalización química reverbera generando exotermia $T(s) = 20 + s\cos(\pi/s)$ Celsius. Compruebe mediante el teorema pertinente la estabilización térmica final justo cuando el reactivo químico s se agota llegando al cero.

Guía de Solución Interactiva

1. El residuo es $s\cos(\pi/s)$. Acotado entre _____ y _____ asumiendo $s > 0$. 2. Ambos factores asintóticos tienden a _____ cuando el reactivo decae a cero. 3. Sumando la constante 20, la temperatura queda en _____ grados.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La altura de vuelo de un dron cartográfico sobre un campo boscoso fluctúa según $H(v) = 150 + \frac{\sin(3v)}{v^2}$ metros, por corrientes de aire v. Defina su cota altitudinal si el viento arrecia sin control.

Problema 5. El índice de volatilidad accionaria decae post-crisis modelado por $V(t) = \frac{\cos^2(t)}{t^3}$. Calcule la predictibilidad financiera del mercado a muy largo plazo proyectando el horizonte bursátil hacia el límite infinito estadístico.

Problema 6. La atenuación de señal fotónica en fibra transoceánica obedece a $F(d) = e^{-d}\sin(2d)$ decibelios por kilómetros extra. Determine la degradación residual límite para un tendido de cableado óptico asintóticamente interminable.

Problema 7. Las revoluciones inestables de una turbina eólica en frenado de emergencia miden $R(t) = t^2\sin(1/t^3)$ RPM. Compruebe la efectividad del sistema inercial certificando la rotación justo al acercarse la variable límite cero.

Problema 8. El eco sónico absorbido por polímeros aislantes rebota produciendo decibelios $A(w) = w\cos(\pi/w)$. Verifique la anulación absoluta del ruido estructural cuando la onda sonora original choca y su potencia converge en cero.

Problema 9. Los levitadores magnéticos de trenes bala ajustan amperaje compensatorio $M(x) = \sqrt{x}\sin(\ln x)$. Demuestre algebraicamente el margen de seguridad de estabilización electromagnética si el factor de vibración de la vía se desvanece.

Problema 10. El foco lumínico de un láser industrial presenta aberración microscópica $L(p) = p^4\cos(1/p)$ micrones. Defina la dispersión del rayo calórico final cuando el calibrador minimice el pulso energético p a nivel base absoluto.

Problema 11. Un núcleo de reactor estabiliza neutrones térmicos disipando $T(k) = 800 + k^2 \sin(e^k/k)$ kelvin. Garantice la integridad de la vasija de contención prediciendo la frontera térmica si el refrigerante colapsa el índice k.

Problema 12. La presión hidráulica de compuertas varía caóticamente $P(f) = \frac{5f^2+\sin f}{f^2+1}$ atmósferas. Determine el estrés hídrico asintótico soportado por el concreto cuando el caudal fluviométrico sube hacia escalas superlativas abrumadoras.

Problema 13. La función de pérdida de una red neuronal oscila registrando $N(i) = \frac{\cos(i)}{\sqrt{i}}$ por ciclo de entrenamiento. Proyecte la convergencia cognitiva artificial del algoritmo tras despachar infinitas iteraciones de aprendizaje profundo supervisado.

Problema 14. Las ondas sísmicas de un estrato geológico secundario rebotan con amplitud $S(w) = w^3 \cos(2/w)$ Richter. Descarte alertas estructurales confirmando la anulación de réplicas tectónicas cuando la inercia de la onda sea microscópica.

Problema 15. El estrés del acero en un puente atirantado durante tormentas registra $E(v) = v^2 \lfloor 1/v \rfloor$ pascales. Cuantifique la fatiga residual de los cables tensores si las ráfagas eólicas oscilantes desaparecen súbitamente por completo.

Problema 16. La amplitud del oleaje oceánico choca contra el dique marcando $O(t) = \frac{\sin^4(t)}{t^2}$. Valide la seguridad de las plataformas marítimas estimando la altura límite de crecida para tiempos cronológicos infinitos prolongados.

Problema 17. Un isótopo radiactivo disipa su radiación gamma emitiendo una varianza $R(d) = d\cos(1/d)$ bequerelios. Confirme la caducidad radioactiva segura evaluando la emisión en las inmediaciones del agotamiento absoluto de la muestra inestable.

Problema 18. El cristal astronómico de un telescopio vibra con una frecuencia óptica $C(z) = |z|\sin(1/z^5)$. Deduzca la nitidez astrofotográfica máxima calculando la distorsión del sensor cuando las micro-vibraciones atmosféricas logren anularse plenamente hoy.

Problema 19. La diferencia de potencial en celdas de iones decae según la entropía cíclica $B(c) = e^{-c}\cos(c^2)$. Justifique físicamente el voltaje parasitario nulo esperado de las baterías de litio sometidas a recargas incalculables.

Problema 20. La tasa probabilística de colapso de onda de un electrón cuántico mide $Q(p) = \frac{p\sin p}{p^2+1}$. Demuestre el estado límite de la partícula subatómica proyectando su nivel energético vectorial a horizontes hiper lejanos.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. 0.
2. 0.
3. 0.
4. 0.
5. 0.
6. 0.
7. 5.
8. 0.
9. 2.
10. 0.
11. 0.
12. 3.
13. 7.
14. 0.
15. 1.
16. 0.
17. 1.
18. 0.
19. 0.
20. 0.

Propuestos de Aplicación

1. 0 cm.
2. 0 milímetros.
3. 20 Celsius.
4. 150 metros.
5. 0 volatilidad.
6. 0 dB de degradación.
7. 0 RPM.
8. 0 decibelios.
9. 0 amperios.
10. 0 micrones.
11. 800 kelvin.
12. 5 atmósferas.
13. 0 pérdida cognitiva.
14. 0 magnitud.
15. 0 pascales.
16. 0 metros de oleaje.
17. 0 bequerelios.
18. 0 distorsión.
19. 0 voltaje.
20. 0 probabilidad.

¡Acotación Exitosa!

'No importa cuán caótico o incontrolable parezca el problema desde adentro; si estableces buenos límites a tu alrededor, tu destino estará siempre bajo control.'

- La filosofía del Teorema del Sándwich

¡Excelente esfuerzo! Acabas de añadir la herramienta más ingeniosa del cálculo de límites a tu arsenal matemático.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com