PRECÁLCULO

# EL DISCRIMINANTE

## Naturaleza de las Raíces

CUADERNO DE TRABAJO

Análisis y Aplicaciones

$\Delta > 0$

$\Delta < 0$

$\Delta = 0$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

# Teoría: El Discriminante ($\Delta$)

En matemáticas, no siempre necesitamos conocer el valor exacto de las soluciones para entender cómo se comporta un modelo. A veces, solo nos interesa saber **qué tipo** de soluciones tenemos. Aquí es donde entra el héroe oculto de la fórmula cuadrática: el **Discriminante**.

## 1. Definición Formal

Dada una ecuación cuadrática en su forma estándar $ax^2 + bx + c = 0$ (donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$), definimos el discriminante, denotado por la letra griega Delta ($\Delta$), como:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

**PROFE TEO**

¡Ojo aquí! El discriminante NO incluye la raíz cuadrada. Es solo lo que está adentro: $b^2 - 4ac$. Un error clásico de examen es ponerle la raíz. ¡No lo hagan!

## 2. Naturaleza de las Raíces

El valor numérico de $\Delta$ "discrimina.º clasifica las raíces de la ecuación sin necesidad de calcularlas:

- **Caso 1: $\Delta > 0$ (Positivo)**
  La ecuación tiene **dos raíces reales y diferentes**. Gráficamente, la parábola intersecta el eje $x$ en dos puntos distintos.
- **Caso 2: $\Delta = 0$ (Cero)**
  La ecuación tiene **una raíz real de multiplicidad 2** (raíces repetidas). Gráficamente, el vértice de la parábola descansa exactamente sobre el eje $x$ (es tangente).
- **Caso 3: $\Delta < 0$ (Negativo)**
  La ecuación **no tiene raíces reales** (tiene dos raíces complejas conjugadas). Gráficamente, la parábola "flota"por encima o por debajo del eje $x$, sin cruzarlo nunca.

**PROFE TEO**

En problemas de física (como choques de drones) o de economía, si plantean una ecuación y sale $\Delta < 0$, significa que el evento **jamás** ocurre. ¡Es la prueba matemática de lo imposible!

## 3. Raíces Racionales e Irracionales

Si los coeficientes $a, b, c$ son números racionales y $\Delta > 0$:

- Si $\Delta$ es un **cuadrado perfecto** (ej. 1, 4, 9, 16, 25...), las raíces son números **racionales**. ¡Esto significa que el polinomio original se podía resolver por aspa simple!
- Si $\Delta$ **no** es un cuadrado perfecto (ej. 7, 12, 20...), las raíces son **irracionales** conjugadas (contienen radicales).

# Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema 1: Análisis Directo

**Enunciado:** Determine la naturaleza de las raíces de $4x^2 - 12x + 9 = 0$.
**Solución:** Identificamos: $a = 4, b = -12, c = 9$.
Calculamos el discriminante: $\Delta = (-12)^2 - 4(4)(9) = 144 - 144 = 0$.
**Conclusión:** Como $\Delta = 0$, la ecuación tiene una única solución real repetida (el trinomio es un cuadrado perfecto).

### Problema 2: Parámetro para Raíces Iguales

**Enunciado:** Halle el valor de $k$ para que la ecuación $x^2 + kx + 16 = 0$ tenga raíces reales e iguales.
**Solución:** Para raíces iguales, exigimos $\Delta = 0$.
$k^2 - 4(1)(16) = 0 \implies k^2 - 64 = 0 \implies k^2 = 64$.
**Respuesta:** $k = 8$ o $k = -8$. (¡Cuidado, hay dos valores posibles!).

**PROFE TEO**
Cuando despejan un cuadrado como $k^2 = 64$, muchos se olvidan del negativo y solo ponen $k = 8$. ¡Recuerden el $\pm$!

### Problema 3: Desigualdades (Raíces Reales)

**Enunciado:** Determine el intervalo de $m$ para que $2x^2 - 4x + m = 0$ tenga soluciones reales.
**Solución:** Para tener soluciones reales (diferentes o iguales), $\Delta \geq 0$.
$(-4)^2 - 4(2)(m) \geq 0 \implies 16 - 8m \geq 0$.
Resolvemos la inecuación: $16 \geq 8m \implies 2 \geq m$.
**Respuesta:** $m \in (-\infty, 2]$.

### Problema 4: Demostración Abstracta

**Enunciado:** Demuestre que la ecuación $x^2 + (p + 1)x + p = 0$ siempre tiene raíces reales, para cualquier valor de $p \in \mathbb{R}$.
**Solución:** Calculamos $\Delta = (p + 1)^2 - 4(1)(p) = p^2 + 2p + 1 - 4p$.
Simplificamos: $\Delta = p^2 - 2p + 1$.
Factorizamos: $\Delta = (p - 1)^2$.
Como cualquier número real al cuadrado es mayor o igual a cero, $(p-1)^2 \geq 0$.
Por lo tanto, **siempre** hay raíces reales.

### Problema 5: Condición de Tangencia

**Enunciado:** Halle el valor de $n$ para que la recta $y = 2x + n$ sea tangente a la parábola $y = x^2 + 4x + 5$.
**Solución:** Igualamos ambas expresiones: $x^2 + 4x + 5 = 2x + n$.
Formamos la cuadrática: $x^2 + 2x + (5 - n) = 0$.
Para que sean tangentes, se deben tocar en un solo punto, ergo $\Delta = 0$.
$2^2 - 4(1)(5 - n) = 0 \implies 4 - 20 + 4n = 0 \implies 4n = 16 \implies n = 4$.

# Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Viabilidad Financiera

**Contexto:** En *misdulcecitos.com*, el margen de utilidad está dado por $U(x) = -2x^2 + 40x - 250$. ¿Es matemáticamente posible obtener una utilidad de \$30?
**Solución:** Planteamos: $-2x^2 + 40x - 250 = 30 \implies -2x^2 + 40x - 280 = 0$.
$\Delta = (40)^2 - 4(-2)(-280) = 1600 - 2240 = -640$.
Como $\Delta < 0$, es imposible alcanzar esa utilidad bajo este modelo.

### Aplicación 2: Ingeniería de Servidores

**Contexto:** Un servidor web para admisiones de la UNI colapsa si las conexiones concurrentes cumplen $t^2 - 12t + C = 0$ con una única raíz. ¿Qué nivel crítico $C$ causa el fallo?
**Solución:** Se exige una única solución, por ende $\Delta = 0$.
$(-12)^2 - 4(1)(C) = 0 \implies 144 - 4C = 0$.
$4C = 144 \implies C = 36$ conexiones concurrentes.

### Aplicación 3: Cinemática y Prevención

**Contexto:** Un vehículo en la Av. La Molina frena. Su distancia al obstáculo es $d(t) = 3t^2 - 18t + 30$. ¿Ocurre un impacto ($d = 0$)?
**Solución:** Evaluamos $\Delta$ de $3t^2 - 18t + 30 = 0$.
Dividiendo entre 3: $t^2 - 6t + 10 = 0$.
$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(10) = 36 - 40 = -4$.
$\Delta < 0$, no hay raíces reales. El vehículo nunca toca el obstáculo (no choca).

**PROFE TEO**
Noten cómo simplifiqué dividiendo entre 3 antes de sacar $\Delta$. Eso ahorra cálculos enormes y ¡el signo de $\Delta$ se mantiene intacto!

### Aplicación 4: Intersección Óptica

**Contexto:** Un láser sigue la trayectoria lineal $y = kx$ e intercepta un lente parabólico $y = x^2 + 9$. Halle $k$ para que el láser solo roce (sea tangente) al lente.
**Solución:** Igualamos: $x^2 + 9 = kx \implies x^2 - kx + 9 = 0$.
Roce implica tangencia ($\Delta = 0$).
$(-k)^2 - 4(1)(9) = 0 \implies k^2 = 36 \implies k = \pm 6$.
(Existen dos trayectorias de láser posibles).

### Aplicación 5: Optimización de Áreas

**Contexto:** Un tutor privado diseña un folleto rectangular de perímetro 20 cm y área $A$. Sabiendo que $x(10 - x) = A$, halle el área máxima analizando $\Delta$.
**Solución:** Formamos $x^2 - 10x + A = 0$.
Para que las dimensiones $x$ existan, $\Delta \geq 0$.
$(-10)^2 - 4(1)(A) \geq 0 \implies 100 - 4A \geq 0 \implies 25 \geq A$.
El área máxima posible es 25 $cm^2$.

# Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda con justificaciones matemáticas y lógicas (sin cálculos numéricos largos).

1. Si el discriminante de una ecuación de posición versus tiempo es negativo, ¿cómo interpreta físicamente ese resultado?
2. ¿Es posible que una ecuación cuadrática con coeficientes enteros tanga una solución racional y una irracional? Justifique usando $\Delta$.
3. El profesor Teófilo afirma: "Si el término $c$ de la cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es negativo y $a$ es positivo, ni siquiera necesito calcular $\Delta$ para saber que hay dos soluciones". ¿Es correcta su afirmación? ¿Por qué?
4. Si graficamos $y = ax^2 + bx + c$ y notamos que la parábola se abre hacia arriba y su vértice está en el cuarto cuadrante, ¿qué signo tiene su discriminante?
5. ¿Por qué exigimos que $a \neq 0$ al definir y utilizar el discriminante $b^2 - 4ac$?
6. Si $\Delta = 0$, la fórmula cuadrática se reduce a $x = -b/(2a)$. ¿Qué representa este punto en la geometría analítica de la parábola?
7. Un estudiante eleva al cuadrado incorrectamente y asume que $\Delta = b^2 + 4ac$. Si resuelve problemas de máximos en economía, ¿qué error conceptual cometerá sobre las predicciones de viabilidad?
8. Si multiplicamos todos los coeficientes de una ecuación cuadrática por un factor negativo $k$, ¿cambia el signo del discriminante?
9. Analice la ecuación $x^2 + 0x + c = 0$. ¿De qué depende exclusivamente la naturaleza de sus raíces?
10. Si dos ecuaciones cuadráticas diferentes tienen exactamente el mismo discriminante positivo, ¿qué característica geométrica comparten sus gráficas en relación al eje $x$?

# Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

## Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** Calcule el discriminante de $3x^2 - 7x + 2 = 0$ y determine la naturaleza de sus raíces.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Identifica los coeficientes: $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.
2. Reemplaza en $\Delta = b^2 - 4ac$:
$\Delta = (\_\_\_\_\_)^2 - 4(\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_\_\_$
3. Conclusión: Como $\Delta$ es __________, las raíces son ____________________.

**Problema 2.** Halle el valor positivo de $p$ para que $x^2 + px + 25 = 0$ tenga raíz única.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Establece la condición para raíz única: $\Delta =$ _____
2. Plantea la ecuación para $p$:
$p^2 - 4(1)(\_\_\_\_\_) = 0 \implies p^2 = \_\_\_\_\_\_\_$
3. Resuelve tomando el valor positivo: $p =$ _____

**Problema 3.** Halle el rango de $k$ para que $-2x^2 + 5x + k = 0$ no tenga soluciones reales.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Condición para raíces no reales: $\Delta <$ _____
2. Plantea la inecuación:
$(\_\_\_\_\_)^2 - 4(-2)(k) < 0 \implies \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_k < 0$
3. Despeja $k$: $k <$ __________

**PROFE TEO**

Las inecuaciones con $\Delta$ son el terror de los parciales. Si el coeficiente de su incógnita queda negativo y lo pasan a dividir, ¡inviertan el símbolo de la

## Problemas Generales (Nivel Medio a Avanzado)

**Problema 4.** Determine la naturaleza de las raíces de $5x^2 - 2x + 4 = 0$.

**Problema 5.** Si $x^2 - 6x + m = 0$ tiene raíces reales diferentes, halle los valores de $m$.

**Problema 6.** ¿Para qué valor de $c$ la ecuación $4x^2 - 20x + c = 0$ es un trinomio cuadrado perfecto?

**Problema 7.** Halle los valores de $k$ que hacen que la gráfica de $y = x^2 + (k + 2)x + 9$ sea tangente al eje de las abscisas.

**Problema 8.** Demuestre algebraicamente evaluando $\Delta$ que $ax^2 + bx - a = 0$ $(a \neq 0)$ siempre tiene raíces reales distintas.

**Problema 9.** Encuentre el intervalo de $p$ para el cual la ecuación $-x^2 + 3x - p = 0$ posee soluciones complejas conjugadas.

**Problema 10.** Determine si las raíces de $6x^2 + 11x - 10 = 0$ son racionales o irracionales, sin resolver la ecuación.

**Problema 11.** Halle $m$ si el sistema no lineal $y = 2x^2 - 3x + 1$ y $y = x + m$ tiene exactamente un punto de intersección.

**Problema 12.** Sabiendo que $k > 0$, ¿qué condición debe cumplir $k$ para que $kx^2 - 4kx + 4 = 0$ no intercepte al eje $x$?

**Problema 13.** Si la ecuación $(m-1)x^2 + 2mx + m = 0$ tiene raíz repetida, halle $m$.

**Problema 14.** Determine los valores de $k$ para los que la parábola $f(x) = (k-2)x^2 - 2kx + (k+3)$ sea tangente al eje $x$.

**Problema 15.** Pruebe que la ecuación $x^2 - (a+b)x + ab - 1 = 0$ tiene soluciones reales y distintas para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

**Problema 16.** Si las raíces de $ax^2 + bx + c = 0$ son imaginarias puras, ¿qué condición estricta recae sobre el discriminante y el coeficiente $b$?

**Problema 17.** Halle el rango de $t$ para que la curva $y = tx^2 + 4x + (t-3)$ cruce el eje $x$ en dos puntos diferentes. (Asuma $t \neq 0$).

**Problema 18.** Sea la ecuación $x^2 - 2(k-1)x + (k^2 - k - 2) = 0$. ¿Para qué valor de $k$ las raíces son reales e iguales?

**Problema 19.** Use el discriminante para encontrar el valor máximo de la función $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$. (Sugerencia: $y = -2x^2 + 8x - 5 \implies \Delta_x \geq 0$).

**Problema 20.** Un círculo de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y una recta $y = x + 4$. ¿Cuál es el radio mínimo $r$ para que la recta sea secante al círculo?

# Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

## Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** El costo operativo en *misdulcecitos.com* es $C = x^2 - 6x + 20$. Determine, usando $\Delta$, si es viable reducir el costo a 10 soles.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Iguala a la meta: $x^2 - 6x + 20 = 10 \implies x^2 - 6x + \_\_\_\_ = 0$
2. Halla $\Delta$: $\Delta = (-6)^2 - 4(1)(10) = 36 - \_\_\_\_ = \_\_\_\_$
3. Analiza: Como $\Delta$ es ________, el costo de 10 soles es ____________

**Problema 2.** Un dron del IMCA UNI desciende modelado por $h(t) = 2t^2 - 8t + k$. Halle $k$ para que el dron roce la superficie del agua ($h = 0$) sin hundirse.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Para rozar (tangencia), exigimos: $\Delta = \_\_\_\_$
2. Plantea: $(-8)^2 - 4(2)(k) = 0 \implies 64 - \_\_\_\_ k = 0$
3. Resuelve: $k = \_\_\_\_\_\_$

**Problema 3.** Un algoritmo en nuestro grupo de FB (390k usuarios) regula el tráfico $T$ mediante $-x^2 + 10x - p = 0$. Halle el máximo $p$ tolerado antes que colapse (sin raíces).

**Guía de Solución Interactiva**

1. Situación límite (raíces iguales): $\Delta = 0$ para hallar máximo.
2. $\Delta = 100 - 4(-1)(-p) = 100 - 4p = 0$
3. Despejando $p$ límite: $p = \_\_\_\_\_\_\_\_$

## Problemas Generales Contextualizados

**Problema 4.** Durante una mentoría privada en Newton College, se plantea si un proyectil con trayectoria $y = -5x^2 + 12x - 8$ superará una barrera horizontal en

$y = 0$. Analice.

**Problema 5.** Un estudiante de *clasesvirtuales.net* invierte $I(x) = x^2 - 14x + 60$ dólares en campañas. ¿Existe un escenario donde recupere exactamente todo, quedando balance neto cero $(I = 0)$?

**Problema 6.** La densidad de tráfico en la av. La Molina oscila según $D(t) = 4t^2 - 20t + 25$. Usando el discriminante, identifique si existe un único instante de flujo ideal $(D = 0)$.

**Problema 7.** En *matematicasmedicina.com*, el servidor detiene solicitudes si el retraso $R = x^2 + cx + 9$ se vuelve negativo. Halle el intervalo de $c$ para garantizar un servicio ininterrumpido $(R \geq 0)$.

**Problema 8.** El canal Profesor Teófilo en YouTube monetiza según $V^2 - 8V + M = 0$, siendo $V$ vistas en millones. Calcule la cota máxima $M$ de ingresos proyectados.

**Problema 9.** Un pastelero de *misdulcecitos.com* corta moldes con área de base $A = -3x^2 + 18x$. Determine la viabilidad de diseñar una tarta con área base exacta de 30 cm$^2$.

**Problema 10.** Un software en la Universidad de Lima detecta estrés estructural en $E = 2y^2 - 5y + 4$. Si $E = 0$ implica fractura, demuestre que el edificio es estadísticamente seguro.

**Problema 11.** Las suscripciones del portal membresías XenForo fluctúan siguiendo $S^2 + kS + 16 = 0$. Determine los valores del parámetro $k$ si se reporta un estancamiento total (multiplicidad de métricas).

**Problema 12.** La PUCP diseña un circuito de robótica con impedancia variable $Z = 5x^2 - kx + 5$. Halle $k$ positivo para que la resonancia ocurra en un único pulso.

**Problema 13.** Un bus de Civa en ruta hacia Abancay ajusta sus marchas. El torque mínimo sigue $T = x^2 - x + 1$. Verifique mediante $\Delta$ que el torque nunca desciende a cero.

**Problema 14.** Rappi Pro implementa geovallas radiales delimitadas por $x^2 + y^2 = 18$ y una avenida principal $y = x + b$. Halle el valor positivo $b$ donde la avenida es límite tangencial.

**Problema 15.** McDonald's despacha órdenes express. La eficiencia en cocina se modela con $-2t^2 + 16t - C = 0$. Encuentre el parámetro constante crítico $C$ usando el concepto de vértice discriminante.

**Problema 16.** Al diseñar PDFs interactivos en LaTeX, un marco toma espacio $A = x^2 + 7x - P$. Encuentre los valores de $P$ para que existan proporciones reales de diagramación armónica.

**Problema 17.** KFC optimiza sus empaques tubulares. La resistencia del cartón es $R(x) = 4x^2 + 12x + 9$. Indique qué nos dice $\Delta = 0$ sobre el defecto de manufactura $R(x) = 0$.

**Problema 18.** Un modelo de trading institucional en Interactive Brokers sigue $P(t) = t^2 + 2t + \beta = 0$. Halle el umbral $\beta$ que divide mercados bajistas sin recuperación y rebotes laterales.

**Problema 19.** Netzun mide retención audiovisual $y = -x^2 + 6x - 10$. Justifique con $\Delta$ si el curso logra en algún minuto una retención de audiencia base cero.

**Problema 20.** El BCP evalúa microcréditos con riesgo sistémico $2x^2 - \lambda x + 8 = 0$. Halle la banda de volatilidad de $\lambda$ donde el algoritmo asume impagos complejos irrevocables.

# Claves de Respuestas

**Propuestos Matemáticos**

1. $\Delta = 25$ (Reales diferentes)
2. $p = 10$
3. $k < -25/8$
4. $\Delta = -76$ (Complejas)
5. $m < 9$
6. $c = 25$
7. $k = 4$ ó $k = -8$
8. $\Delta = b^2 + 4a^2 > 0$
9. $p > 9/4$
10. Racionales ($\Delta = 361 = 19^2$)
11. $m = -1$
12. $0 < k < 1$
13. $m = 0$
14. $k = 6$
15. $\Delta = (a-b)^2 + 4 > 0$
16. $b = 0$ y $\Delta < 0$
17. $-1 < t < 4$, $t \neq 0$
18. $k = -1$
19. Max es 3 (usando $\Delta = 64 - 8(5 + y) \geq 0$)
20. $r > 2\sqrt{2}$

**Propuestos de Aplicación**

1. $\Delta = -4$ (No es viable)
2. $k = 8$
3. $p = 25$
4. $\Delta = -16$ (No supera barrera)
5. $\Delta = -44$ (No, complejo)
6. Sí, $\Delta = 0$ (Instante en $t = 2{,}5$)
7. $c \in [-6, 6]$
8. $M \leq 16$ millones
9. $\Delta = -36$ (Inviable)
10. $\Delta = -7$ (No hay fractura real)
11. $k = \pm 8$
12. $k = 10$
13. $\Delta = -3$ (Nunca baja a cero)
14. $b = 6$
15. $C = 32$
16. $P \geq -49/4$
17. Resistencia focal cero en un solo punto
18. $\beta = 1$
19. $\Delta = -4$ (No, nunca toca cero)
20. $\lambda \in (-8, 8)$

$\Delta = b^2 - 4ac$

# ¡Misión Cumplida!

'No todas las incógnitas necesitan ser resueltas de inmediato. A veces, entender su naturaleza es el paso más inteligente hacia la solución.'

- La sabiduría del álgebra

¡Excelente trabajo! Con dominar el discriminante, ahora tienes visión de rayos X para cualquier problema cuadrático.

$\mathbb{R}$


Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com