PRECÁLCULO

ECUACIONES REDUCIBLES

CUADERNO DE TRABAJO

Expresiones Racionales y Radicales

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría Formal: Ecuaciones Reducibles a Lineales

No todas las ecuaciones matemáticas nacen lineales. Muchas expresiones complejas, que involucran fracciones algebraicas (racionales) o raíces (irracionales/radicales), pueden transformarse en ecuaciones de primer grado ($ax + b = 0$) mediante manipulaciones algebraicas.

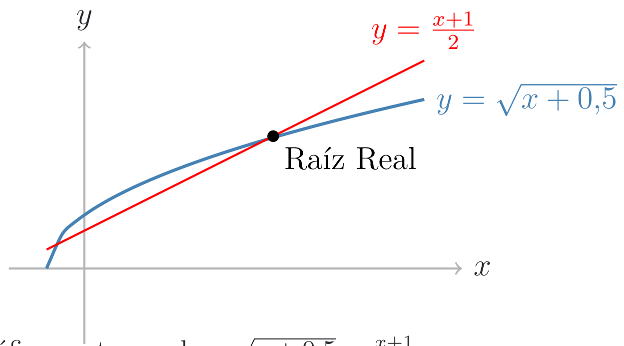
Una ecuación racional contiene variables en el denominador. Para resolverla:

- **Paso 1:** Determinar el Dominio o Universo (valores que hacen cero al denominador).
- **Paso 2:** Multiplicar toda la ecuación por el Mínimo Común Múltiplo (MCM) de los denominadores.
- **Paso 3:** Resolver la ecuación lineal resultante.
- **Paso 4:** Descartar las **raíces extrañas** (soluciones que no pertenecen al dominio).

Advertencia Importante: Si olvidan el Paso 1, pueden dar como válida una solución que provoca una división por cero. ¡Es un error fatal!

Son aquellas donde la variable está bajo el signo radical. El método general es:

- **Paso 1:** Aislar un radical en un miembro de la ecuación.
- **Paso 2:** Elevar ambos lados de la ecuación a un exponente igual al índice del radical (ej. al cuadrado si es raíz cuadrada).
- **Paso 3:** Desarrollar (cuidado con los binomios al cuadrado) y reducir términos. Repetir si quedan más radicales.
- **Paso 4:** Resolver la ecuación lineal final.
- **Paso 5: ¡Verificación obligatoria!** Elevar al cuadrado puede introducir raíces extrañas porque $(-x)^2 = x^2$.



Gráficamente, resolver $\sqrt{x + 0{,}5} = \frac{x+1}{2}$ es hallar la intersección. Al elevar al cuadrado, ¡podríamos crear una intersección "fantasma"!

····▷ COMENTARIO

¡Hola a todos! Este tema es un clásico en exámenes de admisión. La clave no es solo resolver, sino verificar que la solución no "rompa" la ecuación original.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Racional Básica

Enunciado: Resuelva $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{16}{x^2-9}$.
Solución: Notamos que $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$. El dominio exige $x \neq 3$ y $x \neq -3$. Multiplicamos por $(x-3)(x+3)$:
$2(x+3) - 4(x-3) = 16$
$2x + 6 - 4x + 12 = 16 \implies -2x + 18 = 16$
$-2x = -2 \implies x = 1$.
Como $1 \neq \pm 3$, la solución es válida. $CS = \{1\}$.

····▷ **COMENTARIO**
Las raíces cuadradas reales siempre devuelven resultados positivos o cero. Si al aislar la raíz, el otro lado es negativo, ¡la ecuación no tiene solución real!

Problema Resuelto 2: Raíz Extraña (Racional)

Enunciado: Halle el valor de x en $\frac{x}{x-2} = \frac{2}{x-2} + 5$.
Solución: Restricción: $x - 2 \neq 0 \implies x \neq 2$. Multiplicamos por $(x-2)$:
$x = 2 + 5(x-2)$
$x = 2 + 5x - 10 \implies x = 5x - 8 \implies -4x = -8 \implies x = 2$.
Al comprobar con el dominio ($x \neq 2$), vemos que esta es una **raíz extraña**. La ecuación no tiene solución. $CS = \emptyset$.

····▷ **COMENTARIO**
Siempre factoricen los denominadores cuadráticos antes de sacar el MCM. ¡Les ahorrará operar con polinomios gigantes!

Problema Resuelto 3: Radical Simple

Enunciado: Resuelva la ecuación $\sqrt{3x-5} + 4 = 11$.
Solución: Aislamos el radical: $\sqrt{3x-5} = 7$.
Elevamos al cuadrado ambos miembros: $(\sqrt{3x-5})^2 = 7^2$.
$3x - 5 = 49 \implies 3x = 54 \implies x = 18$.
Verificación: $\sqrt{3(18) - 5 + 4} = \sqrt{49} + 4 = 7 + 4 = 11$. Válido.

Problema Resuelto 4: Doble Radical que se reduce a lineal

Enunciado: Resuelva $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-2} = 1$.
Solución: Pasamos un radical al otro lado: $\sqrt{x+7} = 1 + \sqrt{x-2}$.
Elevamos al cuadrado: $x + 7 = 1 + 2\sqrt{x-2} + (x-2)$.
Simplificando las equis: $x + 7 = x - 1 + 2\sqrt{x-2} \implies 8 = 2\sqrt{x-2}$.
Dividiendo entre 2: $4 = \sqrt{x-2}$.
Elevamos al cuadrado nuevamente: $16 = x - 2 \implies x = 18$.
Verificando: $\sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = 1$. Válido.

····▷ **COMENTARIO**
El paso de verificación no es opcional en radicales. Acostúmbrense a hacerlo mentalmente siempre.

Problema Resuelto 5: Ecuación Literal Racional

Enunciado: Despeje x en la proporción $\frac{ax-b}{cx-d} = \frac{a}{c}$, con $c \neq 0$ y $ad \neq bc$.
Solución: Multiplicamos en aspa:
$c(ax - b) = a(cx - d)$
$acx - bc = acx - ad$.
Restamos acx en ambos lados: $-bc = -ad$.
¡Atención! La variable x se ha eliminado por completo. Esto indica una inconsistencia (ya que $ad \neq bc$). Por tanto, la ecuación **no tiene solución** para x.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Física (Lentes y Óptica)

Contexto: Un estudiante del Newton College calibra un proyector usando la fórmula de óptica $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$. Si la distancia focal es $f = 12$ cm y la imagen se forma a $d_i = 60$ cm, halle la distancia del objeto d_o.
Solución: $\frac{1}{12} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{60} \implies \frac{1}{d_o} = \frac{1}{12} - \frac{1}{60}$. MCM es 60. $\frac{1}{d_o} = \frac{5-1}{60} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$. Invertimos: $d_o = 15$ cm.

COMENTARIO

Las fórmulas con inversas son muy comunes en física (circuitos y óptica). Un pequeño tip: $1/A = 1/B + 1/C \implies A = (BC)/(B + C)$.

Aplicación 2: Tasas de Trabajo (Tiempos)

Contexto: Un trabajador experto pinta una casa en 4 días. Su aprendiz tarda x días. Si trabajando juntos terminan exactamente en 3 días, ¿cuánto tardaría el aprendiz en pintar la casa él solo?
Solución: Sumamos las tasas de trabajo: $\frac{1}{4} + \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$. Restamos $\frac{1}{4}$ de ambos lados: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$. Por lo tanto, el aprendiz tarda $x = 12$ días.

Aplicación 3: Economía (Costo Medio)

Contexto: En la pastelería misdulcecitos.com, el costo total mensual es $C(x) = 2000 + 15x$. El dueño desea que el costo medio por pastel sea exactamente 25 soles. ¿Cuántos pasteles (x) debe producir y vender?
Solución: Costo Medio $= \frac{C(x)}{x}$. Entonces $\frac{2000+15x}{x} = 25$. Multiplicando por x: $2000 + 15x = 25x \implies 10x = 2000 \implies x = 200$. Debe producir 200 pasteles.

COMENTARIO

El modelo racional permite analizar cómo los costos fijos se diluyen conforme se aumenta el nivel de producción.

Aplicación 4: Geometría y Radicales

Contexto: El diseño de un parque en la U de Lima tiene forma de triángulo rectángulo. La hipotenusa mide $x + 2$ metros, un cateto mide x metros y el otro mide 6 metros. Determine el valor de x.
Solución: Por Pitágoras: $(x + 2)^2 = x^2 + 6^2 \implies x^2 + 4x + 4 = x^2 + 36$. Las x^2 se anulan (reducida a lineal). $4x = 32 \implies x = 8$.

Aplicación 5: Mezclas y Porcentajes

Contexto: Se tienen 40 litros de una solución ácida al 10 %. ¿Cuántos litros de agua pura (x) se deben agregar para diluir la solución y que la nueva concentración baje al 8 %?
Solución: El ácido puro es $0{,}10(40) = 4$ L. La nueva concentración es $\frac{\text{Ácido Total}}{\text{Volumen Total}} = \frac{4}{40+x} = 0{,}08$. Resolviendo: $4 = 0{,}08(40 + x) \implies 4 = 3{,}2 + 0{,}08x \implies 0{,}8 = 0{,}08x \implies x = 10$ L.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responde a las siguientes preguntas argumentando matemáticamente con conceptos formales.

1. ¿Cuál es la diferencia conceptual entre una ecuación lineal original y una ecuación reducible a lineal?

2. Al resolver $\frac{x^2-4}{x-2} = 4$, obtenemos $x + 2 = 4 \implies x = 2$. Sin embargo, no es solución. Explique por qué.

3. ¿Qué condición de signo debemos exigir mentalmente antes de elevar al cuadrado la ecuación $\sqrt{f(x)} = g(x)$?

4. Si multiplicamos una ecuación por un factor que contiene la variable (ej. $x-1$), ¿qué riesgo asumimos respecto al conjunto solución?

5. Considere $\sqrt{x^2} = x$. ¿Es esta afirmación verdadera para todo número real? Justifique usando valores absolutos.

6. En un problema de trabajo conjunto ($1/A + 1/B = 1/T$), ¿es posible que el tiempo T sea mayor que el tiempo A o B individualmente? ¿Por qué?

7. Dada la ecuación $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, si despejamos z, obtenemos $z = \frac{xy}{x+y}$. ¿Esta fórmula es válida si $x = -y$? Analice el dominio.

8. ¿Por qué una ecuación con un radical de índice impar (como la raíz cúbica) no suele introducir "raíces extrañas" al elevar ambos miembros a la potencia impar?

9. Explique algebraicamente por qué en las proporciones de la forma $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, el producto cruzado $AD = BC$ es válido.

10. Si una ecuación irracional se reduce a una identidad del tipo $0 = 0$, ¿significa que todos los números reales son solución? (Pista: Piense en el dominio del radical).

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Resuelva la ecuación racional simple $\frac{5}{x+2} = \frac{3}{x-1}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Establece las restricciones (denominadores diferentes de cero):
$x \neq$ ________ y $x \neq$ ________

2. Multiplica en aspa para eliminar fracciones:
$5(x-1) =$ ________________

3. Distribuye, agrupa las variables x y halla la solución:
$x =$ ________________

Problema 2. Resuelva la ecuación radical $\sqrt{4x+1} - 5 = 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. Aísla el término que contiene la raíz cuadrada:
$\sqrt{4x+1} =$ ________________

2. Eleva ambos miembros de la ecuación al cuadrado:
$4x + 1 =$ ________________

3. Despeja el valor de x y verifica mentalmente tu respuesta:
$x =$ ________________

Problema 3. Halle x en la ecuación fraccionaria $\frac{x}{x-4} - \frac{4}{x-4} = 8$.

Guía de Solución Interactiva

1. Nota que tienen el mismo denominador. Une las fracciones:
$\frac{\rule{3cm}{0.4pt}}{x-4} = 8$

2. Simplifica la fracción en el lado izquierdo (asumiendo que $x \neq 4$):
__________ $= 8$

3. Concluye y evalúa si la respuesta choca con las restricciones:
CS = __________

Problemas Generales

Problema 4. Resuelva: $\frac{3x-1}{2x+5} = 2$.

Problema 5. Halle la raíz de: $\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} = \frac{5}{6}$.

Problema 6. Determine x en: $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{6}{x^2-9}$.

Problema 7. Resuelva para x: $\frac{x^2+4x-5}{x-1} = 12$.

Problema 8. Resuelva: $\sqrt{2x+8} = x + 4$.

Problema 9. Encuentre todos los valores de x: $\sqrt{x-3} + 5 = 2$.

COMENTARIO

Siempre revisen si la respuesta final anula un denominador. Si es así, se trata de una raíz extraña y no cuenta como solución.

Problema 10. Resuelva la ecuación: $\sqrt[3]{5x-2}=2$.

Problema 11. Halle el valor de x: $\frac{x+5}{x-2}=\frac{x-1}{x+3}$.

Problema 12. Resuelva la ecuación con parámetro $k\neq 0$: $\frac{k}{x}-\frac{x}{k}=\frac{k^2-x^2}{kx}$.

Problema 13. Despeje x en la ecuación racional: $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x^2-1}$.

Problema 14. Resuelva: $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}=5$.

Problema 15. Halle el valor de x que satisface: $\sqrt{2x-\sqrt{x+1}}=\sqrt{2x-1}$.

Problema 16. Resuelva: $\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a} = \frac{2ax}{x^2-a^2}$ para $a \neq 0$.

Problema 17. Halle x en la proporción continua: $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = 3$.

Problema 18. Resuelva la ecuación radical anidada que se reduce a lineal: $\sqrt{x + \sqrt{4x+1}} = 3$.

Problema 19. Determine x si: $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} = \frac{3}{x+3}$.

Problema 20. Encuentre x en: $\sqrt{x^2 - 5x + 14} = x - 2$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un caño llena un tanque en 4 horas. Un segundo caño demora x horas. Abiertos a la vez, lo llenan en 3 horas. Halle x.

Guía de Solución Interactiva

1. Plantea el modelo de suma de tasas de trabajo por hora:
$\frac{1}{4} + \frac{1}{x} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

2. Aísla la fracción que contiene la incógnita restando:
$\frac{1}{x} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

3. Opera las fracciones y despeja invirtiendo:
$x = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Problema 2. Un bote va a v km/h. Recorre 40 km a favor de una corriente de 5 km/h en el mismo tiempo que hace 20 km en contra. Halle v.

Guía de Solución Interactiva

1. Iguala los tiempos $(t = d/v)$ para ambos trayectos:
$\frac{40}{v+5} = \frac{\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_}$

2. Multiplica en aspa para reducir a una ecuación lineal:
$40(v - 5) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

3. Resuelve para encontrar la velocidad en aguas tranquilas:
$v = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Problema 3. El costo medio para fabricar x productos es $(1000 + 10x)/x$. Si se quiere que el costo medio baje a 15, ¿cuántos se deben producir?

Guía de Solución Interactiva

1. Iguala la función de costo medio racional al valor deseado:
$\frac{1000+10x}{x} =$ __________

2. Multiplica todo por x para eliminar el denominador:
$1000 + 10x =$ __________

3. Despeja x para obtener el volumen de producción meta:
$x =$ __________

Problemas Generales

Problema 4. Para ingresar a la PUCP, Juan requiere promedio 15 en tres fases. En las dos primeras suma 28 puntos. ¿Qué puntaje debe obtener en la tercera?

Problema 5. Un estudiante de la U de Lima organiza un evento. Su ganancia por entrada es $(50x - 200)/x$. ¿Cuántas entradas (x) debe vender para ganar 40 por cada una?

Problema 6. La diagonal del monitor de una laptop mide $x + 1$ cm. Su base es x cm y su altura fija mide 5 cm. Determine la longitud exacta de la base.

Problema 7. Se tienen 20 litros de jugo concentrado al 60 %. ¿Cuántos litros de agua pura se deben añadir para diluir la mezcla a una concentración final de exactamente 40 %?

Problema 8. En física, la resistencia equivalente de un circuito paralelo es $1/R_t = 1/R_1 + 1/R_2$. Si la total es 6 ohms y R_1 vale 10 ohms, halle R_2.

Problema 9. En clasesvirtuales.net el tiempo de carga bajo estrés de red es $T = \frac{400}{v+10}$ segundos. Si la plataforma debe cargar en 4 segundos, ¿cuál es el ancho v requerido?

Problema 10. El gran grupo de Facebook de matemáticas modela sus admisiones mediante $\sqrt{100x + 1500} = 50$, donde x son los moderadores activos. ¿Cuántos se necesitan en total?

Problema 11. Un péndulo del laboratorio tiene período $T = 2\pi\sqrt{L/g}$. Si registramos que $T/(2\pi) = 3$ y asumimos gravedad $g = 10$, calcule la longitud L del hilo.

Problema 12. Dos drones se separan en ángulo recto. En t horas su distancia será $\sqrt{(15t)^2 + (20t)^2}$ km. ¿En cuántas horas estarán exactamente a 100 km de distancia?

Problema 13. Un emprendedor de software invierte capital x. El margen de retorno se modela racionalmente como $(3000 + 4x)/x = 7$ por ciento. Encuentre el monto inicial invertido.

Problema 14. Un técnico ensambla PCs en 5h. Su aprendiz requiere x horas. En un pedido urgente, juntos trabajan y acaban en 2h. ¿Cuánto demoraría el novato solo?

Problema 15. Un auto recorre 120 km a velocidad $v + 20$ km/h, tardando lo mismo que un camión en recorrer 80 km a velocidad v. ¿A qué velocidad va el camión?

Problema 16. Se desean mezclar x kg de nueces de \$6/kg con 15 kg de almendras de \$10/kg para conseguir un surtido que cueste \$9/kg en promedio. ¿Halle x?

Problema 17. En el diseño de un puente colgante, un tensor mide de altura 4m, longitud horizontal x, y diagonal en tensión $x + 2$. Calcule el valor del alcance horizontal.

Problema 18. Un telescopio usa lentes convexos donde $1/f = 1/d_o + 1/d_i$. Sabiendo que el foco $f = 20$ cm y $d_o = 30$ cm, obtenga la distancia de imagen generada.

Problema 19. El Profesor Teófilo lanza un video educativo. La función de retención de audiencia en minutos es $R(t) = \frac{100t}{t+4}$. ¿En qué minuto cae al 80 % exacto?

Problema 20. En matematicasmedicina.com, el alcance estadístico de la web obedece a la fórmula irracional $\sqrt{x^2 + 1200} = x + 20$. Determine cuántas interacciones orgánicas (x) valida el modelo asintótico.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $x = 11/2 = 5{,}5$
2. $x = 6$
3. $\emptyset$ (raíz extraña $x = 4$)
4. $x = -11$
5. $x = 2$
6. $x = 3$ (raíz extraña, $\emptyset$)
7. $x = 7$ (-1 no es válido si anula algo, aquí no hay problema pero revise $x - 1$)
8. $x = -4$ o $x = -2$. (Ambas válidas, es cuadrática reducible a lineal si factorizamos). Corrijo: Da cuadrática, soluciones $x = -2, x = -4$. Válidas.
9. $\emptyset$ (Raíz de neg es error)
10. $x = 2$
11. $x = -13/11$
12. Identidad (Todo $x \neq 0$)
13. $x = 0$
14. $x = 7$
15. $x = 3$ (1 es extraña)
16. $x = -a/2$ (si $a \neq 0$)
17. $x = 16$
18. $x = 6$
19. $x = -5/4$
20. $x = 10$

Propuestos de Aplicación

1. 12 horas
2. 15 km/h
3. 200 productos
4. 17 puntos
5. 20 entradas
6. 12 cm
7. 10 litros
8. 15 ohms
9. 90 Mbps/ancho
10. 10 moderadores
11. 90 metros
12. 4 horas
13. 1000 dólares
14. 3.33 horas (3h 20m)
15. 40 km/h
16. 5 kg
17. 3 metros
18. 60 cm
19. 16 minutos
20. 20 interacciones

$\emptyset$

¡Misión Cumplida!

"El álgebra es el instrumento que permite a la mente ir más allá de donde los ojos pueden ver."

- Gottfried Wilhelm Leibniz

¡Sigue transformando lo complejo en simple! Las bases firmes de hoy son tu éxito mañana.

$\mathbb{R}$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com