PRECÁLCULO

# ECUACIONES EXPONENCIALES

CUADERNO DE TRABAJO

Igualación de Bases y Uso de Logaritmos

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

# Teoría: Cazando a la Variable

Una ecuación exponencial es aquella donde la incógnita ($x$) está atrapada en el exponente. Para rescatarla, tenemos tres métodos principales dependiendo de la estructura de la ecuación.

## 1. Método de Igualación de Bases

Si podemos expresar ambos lados de la ecuación como potencias con la **misma base**, podemos igualar directamente los exponentes.

$$\text{Si } a^u = a^v, \text{ entonces } u = v \quad (a > 0, a \neq 1)$$

*Estrategia:* Descompón los números grandes en sus factores primos. Por ejemplo, transforma 8 en $2^3$ o 81 en $3^4$.

**PROFE TEO**
Antes de aplicar cualquier método, asegúrate de que la base exponencial esté completamente sola en un lado de la ecuación. ¡Despeja primero!

## 2. Método de Aplicación de Logaritmos

Cuando las bases no comparten un factor común, extraemos logaritmos a ambos lados de la ecuación para forzar a los exponentes a "bajar".

1. Aislar la expresión exponencial: $a^x = b$.
2. Aplicar ln en ambos lados: $\ln(a^x) = \ln(b)$.
3. Usar la regla de la potencia: $x \cdot \ln(a) = \ln(b)$.
4. Despejar la variable: $x = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$.

**PROFE TEO**
Si las bases son rebeldes y no se pueden igualar (como 2 y 7), tu mejor aliado es el logaritmo natural (ln). Al aplicarlo, la regla de la potencia hace que el exponente caiga.

## 3. Ecuaciones Tipo Cuadráticas (Cambio de Variable)

Si la ecuación tiene la forma $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$, se esconde una cuadrática.

- Definimos una nueva variable: $u = a^x$.
- Reescribimos la ecuación: $A \cdot u^2 + B \cdot u + C = 0$.
- Factorizamos o usamos la fórmula general para hallar $u$.
- **Precaución:** Como $u = a^x$ y $a^x > 0$, cualquier solución donde $u \leq 0$ **se rechaza inmediatamente**.

# Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: Igualando Bases

**Enunciado:** Resuelva $9^{2x-1} = 27^{x+1}$.
**Solución:** Ambas bases provienen del número 3. Sabemos que $9 = 3^2$ y $27 = 3^3$. Sustituimos: $(3^2)^{2x-1} = (3^3)^{x+1}$. Multiplicamos exponentes: $3^{4x-2} = 3^{3x+3}$. Al tener bases iguales, igualamos los exponentes:

$$4x - 2 = 3x + 3 \implies 4x - 3x = 3 + 2 \implies x = 5$$

**Respuesta:** $x = 5$.

**PROFE TEO**
Cuidado al distribuir el logaritmo cuando el exponente es un binomio. Ponle siempre paréntesis para no arruinar el despeje.

### Problema Resuelto 2: Bases Diferentes

**Enunciado:** Halle el valor exacto de $x$ en $5^{x+2} = 8^{2x}$.
**Solución:** Como 5 y 8 no comparten base prima, aplicamos ln a ambos lados:

$$\ln(5^{x+2}) = \ln(8^{2x})$$

Bajamos los exponentes: $(x + 2)\ln(5) = 2x\ln(8)$. Distribuimos: $x\ln(5) + 2\ln(5) = 2x\ln(8)$. Agrupamos las $x$ en un lado: $2\ln(5) = 2x\ln(8) - x\ln(5)$. Factorizamos la $x$: $2\ln(5) = x(2\ln(8) - \ln(5))$. Despejamos: $x = \frac{2\ln(5)}{2\ln(8)-\ln(5)}$.

### Problema Resuelto 3: Exponencial Desplazada

**Enunciado:** Resuelva para $x$: $4e^{3x-1} + 5 = 17$.
**Solución:** Primero, despejamos la base exponencial aislándola. Restamos 5: $4e^{3x-1} = 12$. Dividimos por 4: $e^{3x-1} = 3$. Aplicamos ln a ambos lados: $\ln(e^{3x-1}) = \ln(3)$. El ln anula la $e$: $3x - 1 = \ln(3)$. Despejamos $x$: $3x = \ln(3) + 1 \implies x = \frac{\ln(3)+1}{3}$.

### Problema Resuelto 4: Cambio de Variable Cuadrático

**Enunciado:** Resuelva $e^{2x} - 7e^x + 12 = 0$.
**Solución:** Reescribimos $e^{2x}$ como $(e^x)^2$. Hacemos el cambio $u = e^x$: $u^2 - 7u + 12 = 0$. Factorizamos: $(u - 3)(u - 4) = 0$. Obtenemos: $u = 3$ o $u = 4$. Retornamos a la variable original: Si $e^x = 3 \implies \ln(e^x) = \ln(3) \implies x = \ln(3)$. Si $e^x = 4 \implies \ln(e^x) = \ln(4) \implies x = \ln(4)$. **Respuesta:** $x = \ln(3), x = \ln(4)$.

**Problema Resuelto 5: Ecuación con Potencias Combinadas**

**Enunciado:** Resuelva $2^{x+3} - 2^x = 56$.
**Solución:** No es una cuadrática, pero podemos factorizar. Usamos leyes de exponentes para separar: $2^x \cdot 2^3 - 2^x = 56$. Extraemos factor común $2^x$: $2^x(2^3 - 1) = 56 \implies 2^x(8-1) = 56 \implies 2^x(7) = 56$. Dividimos entre 7: $2^x = 8$. Igualamos bases: $2^x = 2^3$. **Respuesta:** $x = 3$.

# Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Crecimiento Bacteriológico

**Contexto:** Un cultivo celular se expande siguiendo $P(t) = 500(2)^{t/3}$, con $t$ en horas. Determine algebraicamente cuánto tiempo debe transcurrir para alcanzar exactamente cuatro mil bacterias vivas.
**Solución:** Igualamos la población a 4000: $4000 = 500(2)^{t/3} \implies 8 = 2^{t/3}$. Buscamos igualar bases sabiendo que $8 = 2^3$: $2^3 = 2^{t/3} \implies 3 = t/3 \implies t = 9$. **Respuesta:** Transcurrirán 9 horas.

### Aplicación 2: Decaimiento Radiactivo

**Contexto:** La masa residual del isótopo desciende con $M(t) = 80e^{-0{,}05t}$ gramos diarios. Halle los días necesarios para que la muestra peligrosa se reduzca a diez gramos.
**Solución:** $10 = 80e^{-0{,}05t} \implies \frac{10}{80} = e^{-0{,}05t} \implies 0{,}125 = e^{-0{,}05t}$. Aplicamos ln: $\ln(0{,}125) = -0{,}05t$. $t = \frac{\ln(0{,}125)}{-0{,}05} \approx \frac{-2{,}079}{-0{,}05} \approx 41{,}58$. **Respuesta:** Requerirá aproximadamente 41,58 días.

### Aplicación 3: Interés Compuesto Continuo

**Contexto:** Un capital bursátil rinde según $A = 5000e^{0{,}08t}$. Calcule el lapso temporal exacto requerido para duplicar la inversión inicial colocada en el fondo mutuo.
**Solución:** Queremos que el monto sea el doble de 5000, o sea, 10000: $10000 = 5000e^{0{,}08t} \implies 2 = e^{0{,}08t}$. Extraemos logaritmo natural: $\ln(2) = 0{,}08t \implies t = \frac{\ln(2)}{0{,}08} \approx \frac{0{,}693}{0{,}08} \approx 8{,}66$. **Respuesta:** Tardará 8,66 años en duplicarse.

**PROFE TEO**

Siempre que un problema te pida "duplicar.º calcular la "vida media", te encontrarás resolviendo $\ln(2) = k \cdot t$ o $\ln(0{,}5) = -k \cdot t$. ¡Es un clásico!

### Aplicación 4: Saturación de Servidores

**Contexto:** La carga de red satelital crece mediante $C(h) = 10(3)^{0{,}5h}$ terabytes. Calcule a qué hora la transmisión sobrepasará los doscientos setenta terabytes operativos.
**Solución:** $270 = 10(3)^{0{,}5h} \implies 27 = 3^{0{,}5h}$. Transformamos 27 a base 3: $3^3 = 3^{0{,}5h} \implies 3 = 0{,}5h \implies h = \frac{3}{0{,}5} = 6$. **Respuesta:** Ocurrirá a las 6 horas de conexión.

### Aplicación 5: Ley de Enfriamiento

**Contexto:** Una pieza forjada disminuye temperatura bajo $T(m) = 25 + 175e^{-0{,}1m}$. Averigüe en cuántos minutos la aleación tocará los sesenta grados Celsius permitiendo ser manipulada.
**Solución:** $60 = 25 + 175e^{-0{,}1m} \implies 35 = 175e^{-0{,}1m}$. Dividimos: $0{,}2 = e^{-0{,}1m}$. Aplicamos ln: $\ln(0{,}2) = -0{,}1m$. $m = \frac{\ln(0{,}2)}{-0{,}1} \approx \frac{-1{,}609}{-0{,}1} \approx 16{,}09$. **Respuesta:** Se manipulará tras 16,09 minutos.

# Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué la técnica de ïgualación de basesresulta inútil frente a una ecuación del tipo $4^x = 11$? ¿Qué herramienta la sustituye?
2. Si al aplicar el cambio de variable $u = 3^x$ se obtiene $u = -9$ y $u = 3$, ¿por qué la primera raíz matemática debe ser descartada físicamente?
3. Argumente por qué intentar tomar el logaritmo de una suma, como en $\ln(2^x + 5^x)$, no permite bajar los exponentes individualmente.
4. Explique el error procedimental en este despeje: $2 \cdot 5^x = 50 \implies 10^x = 50$. ¿Qué jerarquía de operaciones se violó?
5. ¿Es matemáticamente correcto aplicar logaritmo decimal (log) en lugar de logaritmo natural (ln) para resolver $7^x = 12$? ¿El resultado numérico cambia?
6. Si $e^x = e^{x^2-2}$, ¿por qué estamos autorizados a igualar los exponentes creando una ecuación cuadrática polinomial?
7. ¿Qué estrategia algebraica clave nos permite resolver ecuaciones como $3^{x+1} + 3^x = 36$ donde hay sumas de exponenciales con la misma base?
8. En finanzas, al calcular el tiempo de duplicación, siempre terminamos con $\frac{\ln 2}{r}$. Demuestre algebraicamente de dónde nace esa fracción exacta.
9. Si nos enfrentamos a $x \cdot e^x - 5e^x = 0$, ¿qué método de factorización básico soluciona la ecuación sin recurrir a logaritmos complejos?
10. ¿Por qué una ecuación exponencial estructurada como $e^{2x} + 4e^x + 5 = 0$ jamás tendrá soluciones en los números reales? Analice el discriminante.

# Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

## Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** Resuelva por igualación de bases: $2^{3x-5} = 16$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Convierte el número grande a base 2: $16 = 2^{\_\_\_\_}$.
2. Iguala los exponentes ahora que las bases son idénticas: $3x - 5 = \_\_\_\_$.
3. Despeja la ecuación lineal: $3x = \_\_\_\_ \implies x = \_\_\_\_$.

**Problema 2.** Despeje aplicando logaritmos: $5^x = 14$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Aplica el logaritmo natural (ln) a ambos lados: $\ln(5^x) = \ln(\_\_\_\_)$.
2. Baja la incógnita usando la regla de la potencia: $x \cdot \ln(\_\_\_\_) = \ln(14)$.
3. Despeja $x$ dividiendo: $x = \frac{\ln(14)}{\ln(\_\_\_\_)}$.

**Problema 3.** Resuelva usando variable auxiliar: $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Define $u = e^x$. Sustituye para formar la cuadrática: $u^2 - 5u + \_\_\_\_ = 0$.
2. Factoriza buscando dos números que sumen -5 y multipliquen 6: $(u - \_\_\_\_)(u - \_\_\_\_) = 0$.
3. Retorna a $e^x$. Obtienes $x = \ln(\_\_\_\_)$ y $x = \ln(\_\_\_\_)$.

**PROFE TEO**
En las ecuaciones tipo $A^{2x} - B^x + C = 0$, el término medio siempre te dicta quién será tu variable $u$.

## Problemas Generales

**Problema 4.** Resuelva $7^{x-2} = 49$.

**Problema 5.** Encuentre $x$ en $3^{4x+1} = 27^x$.

**Problema 6.** Resuelva $10^{x^2-1} = 1000$.

**Problema 7.** Despeje $x$ exacto en $8^x = 5$.

**Problema 8.** Resuelva la ecuación $2e^{x+1} = 18$.

**Problema 9.** Determine $x$ sabiendo que $4^{x-1} = 3^{2x}$.

**Problema 10.** Resuelva aislando primero: $5(1{,}2)^x - 3 = 17$.

**Problema 11.** Halle las raíces de $e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$.

**Problema 12.** Resuelva $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$.

**Problema 13.** Halle el valor real de $x$ en $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.

**Problema 14.** Factorice la exponencial: $x^2e^x - 9e^x = 0$.

**Problema 15.** Resuelva agrupando: $5^{x+1} + 5^x = 150$.

**Problema 16.** Halle $x$ en $2^{x+2} - 2^{x-1} = 14$.

**Problema 17.** Despeje en $e^{2x} + 2e^x - 8 = 0$.

**Problema 18.** Resuelva la fraccionaria $\frac{10}{1+e^{-x}} = 8$.

**Problema 19.** Despeje $x$ de $3^x = 2^{x+1}$.

**Problema 20.** Resuelva el sistema implícito $(x-3)4^x - 16(x-3) = 0$.

# Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

## Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** Una red viral propaga malware a $M = 20(3)^d$ computadoras en $d$ días. Despeje el día exacto donde la infección alcance 1620 máquinas paralizadas.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Iguala la función: $1620 = 20(3)^{\_\_\_\_\_}$. 2. Pasa dividiendo el coeficiente inicial: _____ $= 3^d$. 3. Iguala bases usando potencias de 3: $3^{\_\_\_\_\_} = 3^d$, logrando $d =$ _____.

**Problema 2.** Cierto material insonorizante retiene ruido atenuando $D(x) = 100(0{,}8)^x$ decibelios por $x$ centímetros. Determine el grosor requerido logrando amortiguar a solo 64 decibelios.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Fija la meta sonora: $64 = 100(\_\_\_\_\_)^x$. 2. Divide y convierte a decimal: $0{,}64 = (0{,}8)^x$. 3. Como 0,64 es el cuadrado directo, obtenemos $x =$ _____ centímetros.

**Problema 3.** Un bono fiduciario consolida ganancias acumulando $V(t) = 800e^{0{,}06t}$. Proyecte utilizando logaritmos el tiempo estricto para alcanzar mil seiscientos dólares consolidados.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Plasmamos el objetivo: $1600 = 800e^{0{,}06t}$, reduciendo a _____ $= e^{0{,}06t}$. 2. Aplicamos herramienta logarítmica: $\ln(\_\_\_\_\_) = 0{,}06t$. 3. El tiempo de duplicación final será $t = \ln(2)/$_____.

## Problemas Generales Contextualizados

**Problema 4.** La presión atmosférica decae subiendo montañas bajo $P(h) = 101e^{-0{,}12h}$ kilopascales. Despeje la altitud exacta donde los barómetros detecten cincuenta kilopascales ambientales.

**Problema 5.** Un fármaco epidural purga miligramos torrenciales mediante $C(t) = 400(0{,}5)^{t/4}$. Encuentre el momento biológico donde apenas queden cincuenta miligramos circulantes en sangre.

**Problema 6.** La demanda comercial de lentes inmersivos satura mercados reportando $V(m) = 5000(2)^{m-1}$. Especifique qué mes superará los cuarenta mil dispositivos facturados.

**Problema 7.** Una turbina hidroeléctrica frena revoluciones cortando fluido con $R(s) = 3600e^{-0{,}4s}$. Averigüe el segundo límite cuando caiga a novecientas rotaciones operativas.

**Problema 8.** El inventario maderero deforesta hectáreas modelando biomasa $B(a) = 15000(0{,}9)^{a}$. Aproxime algebraicamente el año crítico dejando solo diez mil hectáreas arbóreas vivas.

**Problema 9.** La iluminación oceánica bloquea fotones profundizando $L(p) = 1000(10)^{-p/20}$. Precise la batimetría absoluta interceptando únicamente diez lux lumínicos abismales.

**Problema 10.** Un chasis aerodinámico eleva fricción térmica superando barreras $T(v) = 20(3)^{v/100}$. Aísle la velocidad supersónica fundiendo remaches a quinientos cuarenta grados centígrados.

**Problema 11.** La acidez reactiva consume iones disolviendo placa bajo $A(t) = 0{,}8e^{-0{,}02t}$. Formule el lapso donde la concentración corrosiva cese marcando cero punto cuatro molar.

**Problema 12.** El magnetismo residual desvanece campos ferroeléctricos trazando $M = 120(0{,}25)^{h/2}$. Ubique cronológicamente la lectura Gauss cayendo precipitadamente hacia siete punto cinco unidades.

**Problema 13.** La densidad demográfica rural migra abandonando poblados $P = 6000(1/3)^{t/5}$. Calcule el quinquenio trágico dejando apenas doscientos habitantes arraigados localmente.

**Problema 14.** Un lente cóncavo dispersa intensidad láser perimetral $I = 450e^{-0{,}15d}$. Detecte la distancia radial periférica captando doscientos veinticinco vatios residuales.

**Problema 15.** Las celdas fotovoltaicas desgastan eficiencia absorbiendo $E(a) = 100(0{,}95)^{a}$. Proyecte logarítmicamente el recambio obligatorio bajando al ochenta por ciento productivo.

**Problema 16.** Un criptoanalista fractura códigos multiplicando ciclos $C = 10(4)^{0{,}2m}$. Determine los minutos consumidos descifrando un firewall demandando seiscientos cuarenta ciclos cuánticos.

**Problema 17.** La órbita elíptica pierde satélites rozando exósfera bajo $A(d) = 400(0{,}8)^{d}$ kilómetros. Prediga el día fatídico impactando tierra asumiendo choque a cero altitud (matemáticamente menor a un kilómetro).

**Problema 18.** Un estanque acuícola prolifera algas oscureciendo agua $O = 5e^{0,3d}$. Identifique la fecha límite cegando luz solar alcanzando cien unidades de turbidez óptica.

**Problema 19.** La tensión del puente colgante relaja cables modelando $T = 5000+2000e^{-0,05m}$. Localice el mes estabilizador fijando cinco mil quinientos newtons estructurales tensores.

**Problema 20.** El reactor nuclear controla fusión termodinámica inyectando $K = 10^{0,4t} - 3(10^{0,2t}) + 2$. Establezca el umbral temporal mitigando reacciones secundarias igualando la constante a cero.

# Claves de Respuestas

**Propuestos Matemáticos**

1. $x = 3$.
2. $x = \frac{\ln(14)}{\ln(5)}$.
3. $x = \ln(2)$, $x = \ln(3)$.
4. $x = 4$.
5. $x = -1$.
6. $x = 2$, $x = -2$.
7. $x = \frac{\ln(5)}{\ln(8)}$.
8. $x = \ln(9) - 1$.
9. $x = \frac{\ln(4)}{\ln(4)-2\ln(3)}$.
10. $x = \frac{\ln(4)}{\ln(1{,}2)}$.
11. $x = \ln(3)$, $x = \ln(5)$.
12. $x = 1$, $x = 0$.
13. $x = 2$, $x = 3$.
14. $x = 3$, $x = -3$.
15. $x = 2$.
16. $x = 2$.
17. $x = \ln(2)$ (la base -4 se rechaza).
18. $x = \ln(4)$.
19. $x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)-\ln(2)}$.
20. $x = 3$, $x = 2$.

**Propuestos de Aplicación**

1. Día 4.
2. $x = 2$ cm.
3. $t = \frac{\ln(2)}{0{,}06} \approx 11{,}55$ años.
4. $h = \frac{\ln(50/101)}{-0{,}12} \approx 5{,}86$ km.
5. $t = 12$ horas.
6. Mes 4.
7. $s = \frac{\ln(0{,}25)}{-0{,}4} \approx 3{,}46$ s.
8. $a = \frac{\ln(10/15)}{\ln(0{,}9)} \approx 3{,}84$ años.
9. $p = 40$ metros.
10. $v = 300$ unidades.
11. $t = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}02} = 35$ lapsos.
12. $h = 4$ horas.
13. $t = 15$ años (o 3 quinquenios).
14. $d = \frac{\ln(0{,}5)}{-0{,}15} \approx 4{,}62$ rad.
15. $a = \frac{\ln(0{,}8)}{\ln(0{,}95)} \approx 4{,}35$ años.
16. $m = 15$ minutos.
17. $d > \frac{\ln(1/400)}{\ln(0{,}8)} \approx 26{,}8$ días.
18. $d = \frac{\ln(20)}{0{,}3} \approx 9{,}98$ días.
19. $m = \frac{\ln(0{,}25)}{-0{,}05} \approx 27{,}7$ meses.
20. $t = \frac{\log(2)}{0{,}2} \approx 1{,}5$ o $t = 0$.

$x = \ln(k)$

# ¡Nivel Superado!

'La variable de tu éxito puede parecer atrapada en un exponente inalcanzable. Pero con la base correcta y aplicando el método adecuado, no hay incógnita que no puedas revelar.'

- Despejando el Futuro

¡Felicidades! Has dominado las ecuaciones exponenciales, desbloqueando la llave para resolver los modelos matemáticos que rigen el crecimiento del mundo.

$a^u$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com