

PRECÁLCULO

ECUACIONES LINEALES

CUADERNO DE TRABAJO
Resolución y Modelado del Mundo Real

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Ecuaciones Lineales y Modelado

Las ecuaciones lineales constituyen la base fundamental del precálculo y el álgebra. Nos permiten modelar relaciones donde la tasa de cambio es constante.

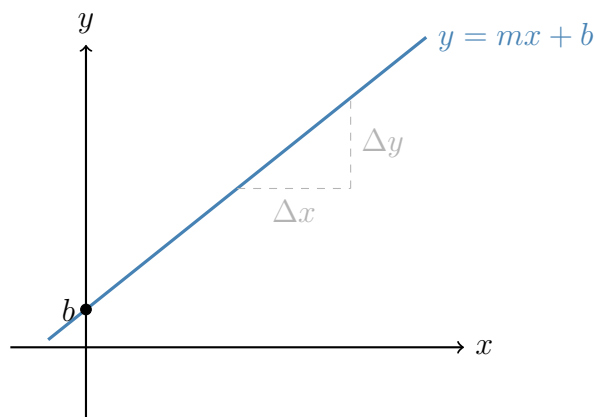
Una ecuación lineal en una variable x se puede expresar en su forma estándar como $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$. Su única solución en \mathbb{R} es $x = -b/a$. En sistemas más complejos o ecuaciones literales, se aplican axiomas de campo para aislar la incógnita.

Advertencia Importante: Un error común es dividir entre una variable o expresión algebraica sin considerar que podría ser cero. ¡Siempre restrinjan el dominio!

El modelado matemático traduce un problema verbal a una ecuación. Pasos clave:

- Identificar la variable independiente (ej. tiempo, cantidad) y la dependiente.
- Construir la función lineal $y = mx + b$, donde m es la tasa de cambio (pendiente) y b es el valor inicial (ordenada al origen).
- Resolver para la incógnita y validar la respuesta en el contexto del problema.

Consejo: ¡Cuidado con las unidades! Si la tasa es km/h y el tiempo está en minutos, deben hacer la conversión antes de armar la ecuación.



....▷

COMENTARIO

¡Hola a todos! Una ecuación lineal es como un viaje a velocidad constante. Entenderla bien les hará la vida mucho más fácil en Cálculo.

....▷

COMENTARIO

La pendiente m nos dice qué tan rápido crece o decrece. Si $m > 0$ sube, si $m < 0$ baja. ¡Piénsenlo como subir o bajar una escalera!

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1

Enunciado: Resuelva para x : $\frac{3x-2}{4} - \frac{x+1}{3} = \frac{5x}{6} - 1$.

Solución: El mcm de 4, 3 y 6 es 12. Multiplicamos toda la ecuación por 12:

$$3(3x - 2) - 4(x + 1) = 2(5x) - 12$$

$$9x - 6 - 4x - 4 = 10x - 12 \implies 5x - 10 = 10x - 12$$

$$-5x = -2 \implies x = \frac{2}{5}.$$

Problema Resuelto 2

Enunciado: Despeje x en la ecuación literal: $a(x - c) = b(x - a) + c$, sabiendo que $a \neq b$.

Solución: Expandimos ambos lados: $ax - ac = bx - ab + c$.

Agrupamos los términos con x en el lado izquierdo: $ax - bx = ac - ab + c$.

Factorizamos x : $x(a - b) = a(c - b) + c$.

Como $a \neq b$, dividimos: $x = \frac{ac - ab + c}{a - b}$.

Problema Resuelto 3

Enunciado: Resuelva la ecuación con valor absoluto anidado o fraccionario que se reduce a lineal: $\left| \frac{2x-5}{3} \right| = 7$.

Solución: Por definición de valor absoluto, se abren dos casos lineales:

Caso 1: $\frac{2x-5}{3} = 7 \implies 2x - 5 = 21 \implies 2x = 26 \implies x = 13$.

Caso 2: $\frac{2x-5}{3} = -7 \implies 2x - 5 = -21 \implies 2x = -16 \implies x = -8$.

Conjunto Solución: $\{-8, 13\}$.

Problema Resuelto 4

Enunciado: Determine el valor de k para que la ecuación $(k^2 - 4)x + k = 2$ tenga infinitas soluciones.

Solución: Reorganizamos: $(k^2 - 4)x = 2 - k$.

Para infinitas soluciones, requerimos que la forma sea $0x = 0$.

Entonces, $k^2 - 4 = 0 \implies k = 2$ o $k = -2$.

Además, $2 - k = 0 \implies k = 2$.

La intersección de ambas condiciones es $k = 2$.

....▷

COMENTARIO

Multiplicar por el mcm elimina todas las fracciones de golpe.

¡Es un truco infalible para ganar velocidad!

....▷

COMENTARIO

No olviden el caso negativo del valor absoluto. Es el error número 1 en exámenes de admisión.

Problema Resuelto 5

Enunciado: Resuelva el sistema paramétrico para x :

$$px + qy = p + q \quad (1)$$

$$qx + py = p - q \quad (2)$$

Solución: Multiplicamos (1) por p y (2) por q :

$$p^2x + pqy = p^2 + pq$$

$$q^2x + pqy = pq - q^2$$

$$\text{Restamos: } x(p^2 - q^2) = p^2 + q^2 \implies x = \frac{p^2 + q^2}{p^2 - q^2}, \text{ si } p \neq \pm q.$$

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Física (Movimiento Uniforme)

Contexto: Dos trenes parten de estaciones a 450 km de distancia a las 8:00 AM, viajando uno hacia el otro. Uno va a 70 km/h y el otro a 80 km/h. ¿A qué hora exacta se cruzan?

Solución: Suma de distancias es 450. Ecuación: $70t + 80t = 450 \implies 150t = 450 \implies t = 3$ horas. Se cruzan a las 11:00 AM.

Aplicación 2: Economía (Punto de Equilibrio)

Contexto: Una fábrica de misdulcecitos.com tiene costos fijos mensuales de \$5000. Producir cada pastel cuesta \$8 y se vende a \$20. ¿Cuántos pasteles deben vender para no ganar ni perder?

Solución: Ingresos = Costos Totales. Ecuación: $20x = 5000 + 8x \implies 12x = 5000 \implies x = 416,67$. Deben vender 417 pasteles para equilibrarse.

Aplicación 3: Mezclas Químicas

Contexto: Un farmacéutico tiene 20 litros de alcohol al 30%. ¿Cuántos litros de alcohol puro (100%) debe añadir para que la mezcla final sea de alcohol al 50%?

Solución: $0,30(20) + 1,00(x) = 0,50(20 + x)$. Resolviendo: $6 + x = 10 + 0,5x \implies 0,5x = 4 \implies x = 8$. Debe añadir 8 litros de alcohol puro.

Aplicación 4: Finanzas Personales

Contexto: Un inversor reparte \$12,000 en dos fondos. Uno rinde 5% anual y el otro pierde 2% anual. Si al final del año ganó exactamente \$390, ¿cuánto invirtió en el primer fondo?

Solución: $0,05x - 0,02(12000 - x) = 390$.
 $0,05x - 240 + 0,02x = 390 \implies 0,07x = 630 \implies x = 9000$. Invirtió \$9,000.

Aplicación 5: Trabajo Compartido

Contexto: Una bomba llena una piscina en 6 horas. Una segunda bomba la llena en 4 horas. Si ambas funcionan juntas con un desagüe que la vacía en 12 horas, ¿cuánto tardará en llenarse?

Solución: Tasas: $1/6 + 1/4 - 1/12 = 1/t$. mcm es 12.
 $2/12 + 3/12 - 1/12 = 1/t \implies 4/12 = 1/t \implies t = 3$. Tardará 3 horas.

.....>

COMENTARIO

Cuando dos objetos van en sentidos opuestos, sus velocidades relativas se suman.
 ¡Recuérdelo para física!

.....>

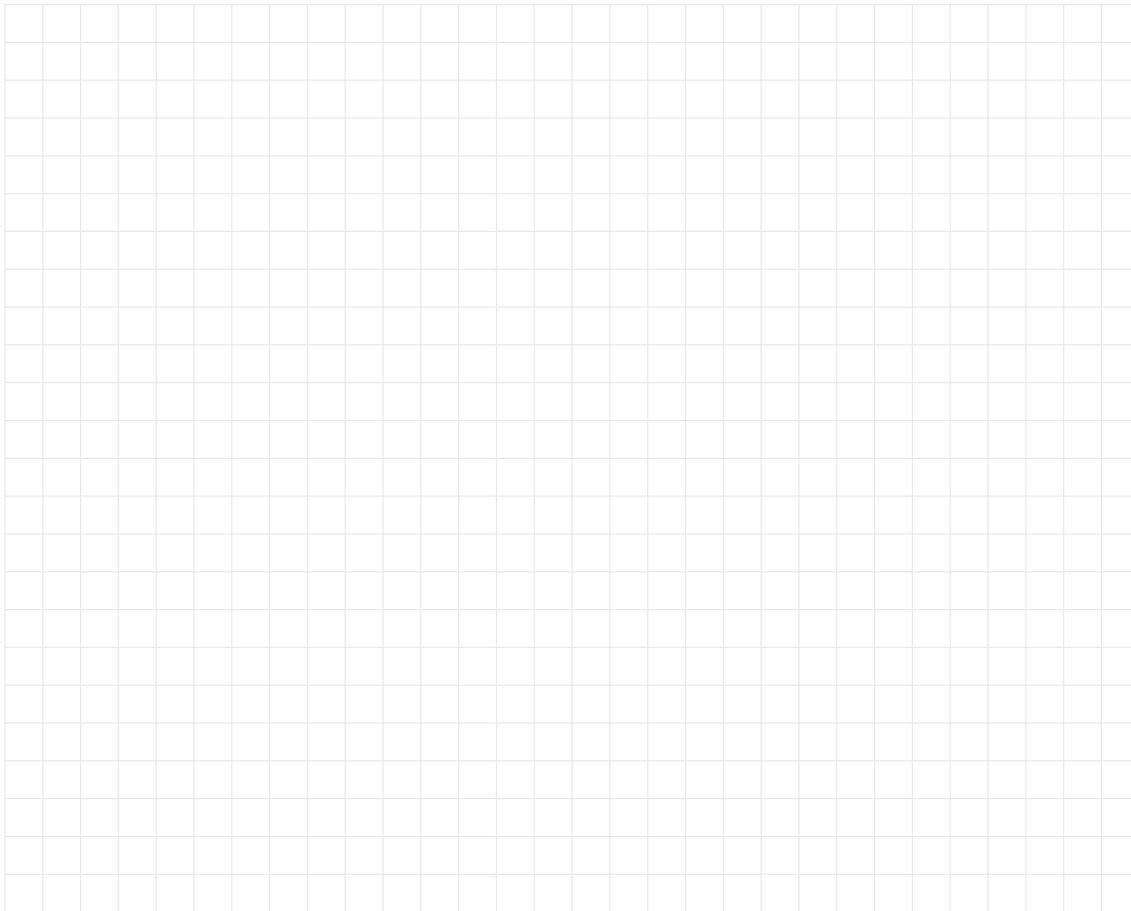
COMENTARIO

El truco en mezclas es hacer una tabla.
 Volumen por Concentración igual a Cantidad de Sustancia pura.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responde a las siguientes preguntas conceptuales argumentando matemáticamente.

1. ¿Por qué la ecuación $0x = 5$ no tiene solución, mientras que $0x = 0$ tiene infinitas soluciones?
2. Si la pendiente de una recta de costo total es negativa, ¿qué significado económico tendría? ¿Es posible?
3. ¿Qué diferencia gráfica existe entre una ecuación lineal y una identidad?
4. ¿Por qué en los problemas de trabajo compartido sumamos las inversas de los tiempos en lugar de los tiempos mismos?
5. Al resolver $|x - a| = b$ con $b < 0$, ¿qué conjunto solución obtenemos y por qué?
6. En un sistema de unidades, si x está en litros, ¿qué unidades debe tener el coeficiente a en $ax + b = y$ si y está en dólares?
7. ¿Es cierto que toda ecuación que involucra la variable a la potencia 1 es lineal? (Pista: piensen en $1/x$).
8. Si dos autos van en la misma dirección, ¿por qué restamos sus velocidades para hallar el tiempo de encuentro relativo?
9. ¿Cómo afecta al punto de equilibrio de una empresa si los costos fijos se duplican, asumiendo márgenes constantes?
10. Justifique por qué al multiplicar una desigualdad lineal por un número negativo se debe invertir el sentido de la desigualdad.



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $x = 22/3$
2. $y = (-4x + 20) / -11$
3. $x = 9/5$
4. $x = 4,5$
5. $x = \frac{abc}{a+b}$
6. $x = 0$
7. $x = 2, y = 1 \rightarrow xy = 2$
8. $x < 15$
9. $x = 5, x = -1,5$
10. $x = 1, y = 2, z = 3$
11. $x = 2$ (-2 es extraña)
12. $x = \pm 5$
13. $m = \pm 2\sqrt{3}$
14. $x = \frac{ab+bc-ac}{a+b-c}$
15. $-1/3 < x < 7$
16. Infinitas (líneas coincidentes)
17. $x = -4/7$
18. $x \approx 2,47$
19. $x = 4, x = -1$
20. $x = 4$ o $x = 1$

Propuestos de Aplicación

1. 6 horas
2. 48
3. 20 kg
4. 6 horas
5. Área = 273 m²
6. Juan tiene 5 años
7. 150 VIP
8. 88
9. 85 grados
10. 75 empleados
11. 3 horas
12. 7%
13. 63
14. 20 kg
15. \$23,333.33
16. 1 hora
17. 270 km/h
18. 20g y 20g
19. 2.67 horas (2h 40min)
20. \$150 por equipo



¡Llegaste al Final!

'Las matemáticas no consisten en números, ecuaciones, cálculos o algoritmos: consisten en comprender.'

- William Paul Thurston

¡Sigue modelando el mundo, ecuación a ecuación! El cálculo avanzado te espera.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

