PRECÁLCULO

ECUACIONES CUADRÁTICAS II

CUADERNO DE TRABAJO

Fórmula General y Completar Cuadrados

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Ecuaciones Cuadráticas II

Cuando el método del aspa falla, no todo está perdido. Çompletar el cuadradoz la "Fórmula Cuadrática"son las herramientas definitivas que resuelven **cualquier** ecuación cuadrática, sin importar qué tan feos sean los números.

1. Completar el Cuadrado

El objetivo es forzar la aparición de un Trinomio Cuadrado Perfecto (TCP) en un lado de la ecuación para luego aplicar raíz cuadrada. **Pasos Clave:**

1. Asegúrese de que el coeficiente de x^2 sea 1. Si no lo es, divida toda la ecuación entre a.
2. Mueva el término constante al lado derecho.
3. **El Truco:** Tome la mitad del coeficiente de x, elévelo al cuadrado $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, y **súmelo a ambos lados**.
4. Factorice el lado izquierdo como un binomio al cuadrado y resuelva despejando x.

COMENTARIO
¡Hola a todos! La fórmula cuadrática no cayó del cielo; es literalmente el resultado de completar el cuadrado en letras. ¡Apréndanse el proceso y dominarán el álgebra!

2. La Fórmula Cuadrática y el Discriminante

Para la ecuación estándar $ax^2 + bx + c = 0$, las soluciones están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión dentro de la raíz se llama **Discriminante** ($\Delta = b^2 - 4ac$) y dictamina el tipo de soluciones que obtendremos:

- Si $\Delta > 0$: Dos soluciones reales y diferentes (cruza el eje x dos veces).
- Si $\Delta = 0$: Una solución real repetida (toca el eje x en un punto, el vértice).
- Si $\Delta < 0$: No hay soluciones reales (las soluciones son números complejos conjugados).

COMENTARIO
¡CUIDADO! Si suman $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a la izquierda, ¡DEBEN sumarlo a la derecha! Si no, rompen el equilibrio de la ecuación.

COMENTARIO
Antes de aplicar toda la fórmula gigante, ¡calculen solo el discriminante! Si sale negativo en un problema de distancias, deténganse: significa que la situación planteada es físicamente imposible.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Completar el Cuadrado ($a = 1$)

Enunciado: Resuelva completando el cuadrado: $x^2 - 6x - 7 = 0$.
Solución: Pasamos el 7: $x^2 - 6x = 7$.
Tomamos la mitad de -6, que es -3, y elevamos al cuadrado: $(-3)^2 = 9$.
Sumamos 9 a ambos lados: $x^2 - 6x + 9 = 7 + 9$.
Factorizamos el TCP: $(x - 3)^2 = 16$.
Extraemos raíz: $x - 3 = \pm 4$.
$x_1 = 3 + 4 = 7, \quad x_2 = 3 - 4 = -1$.

Problema Resuelto 2: Completar el Cuadrado ($a \neq 1$)

Enunciado: Resuelva completando el cuadrado: $2x^2 + 8x - 5 = 0$.
Solución: Dividimos entre 2: $x^2 + 4x - \frac{5}{2} = 0$.
Pasamos constante: $x^2 + 4x = \frac{5}{2}$.
Mitad de 4 es 2, al cuadrado es 4. Sumamos 4:
$x^2 + 4x + 4 = \frac{5}{2} + 4 \implies (x + 2)^2 = \frac{13}{2}$.
Raíz: $x + 2 = \pm\sqrt{\frac{13}{2}} = \pm\frac{\sqrt{26}}{2}$.
Respuesta: $x = -2 \pm \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Problema Resuelto 3: Fórmula Cuadrática (Raíces Irracionales)

Enunciado: Resuelva $3x^2 - 5x - 1 = 0$.
Solución: Identificamos $a = 3, b = -5, c = -1$.
$\Delta = (-5)^2 - 4(3)(-1) = 25 + 12 = 37$.
Como $\Delta > 0$, hay dos soluciones reales.
Aplicamos fórmula: $x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{37}}{2(3)} = \frac{5\pm\sqrt{37}}{6}$.

COMENTARIO
Las raíces irracionales son comunes en el mundo real. ¡No le tengan miedo a dejar la raíz indicada si no es exacta!

Problema Resuelto 4: Soluciones Complejas (Avanzado)

Enunciado: Resuelva $x^2 - 4x + 13 = 0$.
Solución: $a = 1, b = -4, c = 13$.
$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(13) = 16 - 52 = -36$.
Como $\Delta < 0$, las raíces son imaginarias.
Fórmula: $x = \frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}$.
Sabiendo que $\sqrt{-36} = 6i$, tenemos:
$x = \frac{4\pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$.

Problema Resuelto 5: Ecuación Reducible a Cuadrática

Enunciado: Resuelva $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{4}$.
Solución: MCM es $4x(x+2)$. Multiplicamos todo:
$4(x+2) + 4x = 3x(x+2) \implies 4x + 8 + 4x = 3x^2 + 6x$.
Igualamos a cero: $3x^2 - 2x - 8 = 0$.
$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(-8) = 4 + 96 = 100$. (¡Perfecto!).
$x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6}$.
$x_1 = 12/6 = 2$. $x_2 = -8/6 = -4/3$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Optimización Espacial

Contexto: En *misdulcecitos.com*, se desea doblar una hoja de hojalata de 30 cm de ancho para formar un canal rectangular sin tapa de área transversal máxima. El área es $A(x) = x(30-2x)$. Complete cuadrados para hallar x.
Solución: $A = -2x^2 + 30x = -2(x^2 - 15x)$.
Completamos: $-2(x^2 - 15x + 56{,}25) + 112{,}5 = -2(x-7{,}5)^2 + 112{,}5$.
El máximo se da cuando el cuadrado es cero: $x = 7{,}5$ cm.

Aplicación 2: Física / Movimiento Parabólico

Contexto: Un dron de IMCA UNI lanza un sensor. La altura es $h(t) = -5t^2 + 12t + 2$. ¿En qué momento exacto toca el suelo?
Solución: $h = 0 \implies -5t^2+12t+2 = 0$. Multiplicamos por -1: $5t^2-12t-2 = 0$.
$\Delta = (-12)^2 - 4(5)(-2) = 144 + 40 = 184$.
$t = \frac{12\pm\sqrt{184}}{10} = \frac{12\pm2\sqrt{46}}{10} = \frac{6\pm\sqrt{46}}{5}$.
Tomamos la solución positiva: $t \approx 2{,}56$ s.

Aplicación 3: Economía y Tarifas

Contexto: Rappi Pro modela el beneficio por suscripciones como $B(x) = -2x^2 + 140x - 1200$. Halle el precio x que anula el beneficio.
Solución: $-2x^2 + 140x - 1200 = 0$. Dividimos entre -2: $x^2 - 70x + 600 = 0$.
Completamos cuadrado: $x^2 - 70x + 1225 = -600 + 1225 = 625$.
$(x-35)^2 = 625 \implies x - 35 = \pm 25$.
$x_1 = 60, x_2 = 10$. El beneficio es cero a \$10 y a \$60.

Aplicación 4: Cinemática / Distancias

Contexto: Un bus de Civa a Abancay debe sortear un obstáculo. El modelo de frenado límite es $0{,}05v^2 + v - 60 = 0$. Determine v usando la fórmula general.
Solución: Multiplicamos por 20 para quitar decimales: $v^2 + 20v - 1200 = 0$.
Fórmula: $\Delta = 400 - 4(-1200) = 5200$.
$v = \frac{-20\pm\sqrt{5200}}{2} = -10 \pm 10\sqrt{13}$.
Velocidad (positiva): $\approx 26{,}05$ km/h.

Aplicación 5: Diseño Arquitectónico

Contexto: Newton College diseña una rampa cuyo perfil es $y = 0{,}5x^2 - 3x + 4$. ¿En qué puntos horizontales x la rampa toca el nivel de piso $(y = 0)$?
Solución: $0{,}5x^2 - 3x + 4 = 0$. Multiplicamos por 2: $x^2 - 6x + 8 = 0$.
Completamos cuadrado: $x^2 - 6x + 9 = -8 + 9 = 1$.
$(x-3)^2 = 1 \implies x - 3 = \pm 1$.
$x_1 = 4, x_2 = 2$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos algebraicos.

1. ¿Por qué la fórmula cuadrática tiene un $\pm$ antes de la raíz? ¿Qué representaría físicamente si solo tuviera un $+$?
2. Al completar el cuadrado para $x^2 + px + q = 0$, ¿por qué sumamos específicamente el cuadrado de la mitad de p?
3. Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es cero, la gráfica de la parábola solo toca el eje x en un punto. Demuestre que ese punto es el vértice.
4. Un alumno intenta completar el cuadrado en $2x^2 + 8x = 10$ sumando 16 a ambos lados (porque la mitad de 8 es 4 y al cuadrado es 16). ¿Cuál es su error letal?
5. Explique la conexión entre completar el cuadrado en una ecuación cuadrática y escribir la función cuadrática en su "forma de vértice" $f(x) = a(x - h)^2 + k$.
6. En un problema de caída libre, la fórmula cuadrática arroja dos tiempos, uno negativo y uno positivo. ¿Deberíamos siempre descartar el tiempo negativo en física elemental? ¿Por qué?
7. Si en la fórmula general el término c es negativo y a es positivo, demuestre por qué la ecuación SIEMPRE tendrá dos soluciones reales.
8. ¿Qué sucede con la fórmula cuadrática si $a = 0$? ¿Por qué esto matemáticamente tiene sentido?
9. Compare la resolución por factorización (aspa simple) y por la fórmula general. ¿Cuándo es tácticamente superior usar uno u otro método?
10. Si una ecuación cuadrática tiene soluciones imaginarias complejas conjugadas (ej. $3 \pm 2i$), ¿dónde se ubica la gráfica de la parábola respecto al eje x?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Complete el cuadrado: $x^2 + 10x - 11 = 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. Pasa la constante y suma la mitad del centro al cuadrado:
$x^2 + 10x + (\_\_\_\_\_)^2 = 11 + (\_\_\_\_\_)^2$

2. Factoriza y simplifica:
$(x + \_\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_$

3. Aplica raíz y resuelve:
$x = \_\_\_\_\_ \pm \_\_\_\_\_ \implies x_1 = \_\_\_\_\_, x_2 = \_\_\_\_\_$

Problema 2. Aplique la fórmula general a: $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica coeficientes y halla Δ:
$a = \_\_\_, b = \_\_\_, c = \_\_\_$. $\Delta = (\_\_\_)^2 - 4(\_\_\_)(\_\_\_) = \_\_\_\_\_$

2. Inserta en la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$:
$x = \frac{\_\_\_\_\_ \pm \sqrt{\_\_\_\_\_}}{\_\_\_\_\_}$

3. Resuelve los dos casos:
$x_1 = \_\_\_\_\_, \quad x_2 = \_\_\_\_\_$

Problema 3. Analice el discriminante de: $3x^2 - 4x + 5 = 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. Calcula $\Delta = b^2 - 4ac$:
$\Delta = (\_\_\_\_\_)^2 - 4(\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_)$

2. Resultado de Δ:
$\Delta = \_\_\_\_\_$

3. Conclusión sobre el tipo de raíces:
Las raíces son ____________________

Problemas Generales

Problema 4. Resuelva completando el cuadrado: $x^2 - 8x + 12 = 0$.

Problema 5. Use la fórmula general: $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Problema 6. Complete el cuadrado: $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Problema 7. Resuelva con la fórmula: $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Problema 8. Complete el cuadrado (a no es 1): $2x^2 + 12x - 14 = 0$.

Problema 9. Encuentre raíces exactas (irracionales): $x^2 - 6x + 2 = 0$.

····▷ **COMENTARIO**

Completar el cuadrado es vital para graficar parábolas y resolver integrales en cálculo. ¡No se queden solo con la fórmula general!

Problema 10. Resuelva: $4x^2 - 12x + 9 = 0$. Interprete Δ.

Problema 11. Complete el cuadrado con fracciones: $x^2 - 3x - 1 = 0$.

Problema 12. Fórmula general: $5x^2 + 2x - 1 = 0$.

Problema 13. Analice el tipo de raíces de $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Problema 14. Complete el cuadrado para hallar el vértice: $y = x^2 - 10x + 24$.

Problema 15. Resuelva la fracción reducible: $\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} = 1$.

Problema 16. Complete el cuadrado: $-3x^2 + 12x + 15 = 0$.

Problema 17. Fórmula general para complejas: $2x^2 - 4x + 5 = 0$.

Problema 18. Despeje x completando el cuadrado literal: $x^2 + px + q = 0$.

Problema 19. Ecuación con radicales que se vuelve cuadrática: $\sqrt{3x+7} = x + 1$.

Problema 20. Complete cuadrados en ambas variables para identificar el centro de un círculo: $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. En *misdulcecitos.com*, el costo medio marginal es $\frac{10}{x} + \frac{x}{2} = 5$. Halle la cantidad óptima x usando fórmula.

Guía de Solución Interactiva

1. Multiplica por $2x$ para linealizar:
$20 + x^2 =$ __________ $\implies x^2 - 10x + 20 = 0$

2. Halla Δ:
$\Delta = 100 - 4(1)(20) =$ _____

3. Aplica fórmula y halla las raíces:
$x = \frac{10 \pm \sqrt{20}}{2} =$ _______________

Problema 2. El servidor de un grupo de FB con 390k usuarios modela la latencia en segundos como $t^2 - 8t + 12 = 0$. Complete cuadrados para el tiempo pico.

Guía de Solución Interactiva

1. Pasa constante y suma el cuadrado de la mitad de 8:
$t^2 - 8t +$ _____ $= -12 +$ _____

2. Factoriza como TCP:
$(t -$ _____$)^2 =$ _____

3. Despeja los dos tiempos críticos:
$t_1 =$ _____, $t_2 =$ _____

Problema 3. Un paquete atún Primor se lanza parabólicamente con $h = -5t^2 + 10t + 2$. Use fórmula para hallar cuándo $h = 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. Evalúa Δ para $a = -5, b = 10, c = 2$:
$\Delta = 100 - 4(-5)(2) =$ __________

2. Aplica la fórmula general:
$t = \frac{-10 \pm \sqrt{140}}{-10}$

3. Selecciona el tiempo positivo aproximado:
$t \approx$ _______________

Problemas Generales

Problema 4. Newton College calcula el área de una cancha $A = x^2 - 14x$. Si el área requerida es 32 m^2, complete el cuadrado para hallar el ancho x.

Problema 5. El IMCA UNI optimiza una red cuya sobrecarga es $C = 2x^2 - 5x - 12$. Use la fórmula general para encontrar las interrupciones críticas ($C = 0$).

Problema 6. La venta de baldes KFC sigue $P(x) = -x^2 + 40x$. Complete el cuadrado para determinar el precio x que maximiza el ingreso.

Problema 7. En Norky's, la rotación de mesas obedece $\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x} = 2$. Conviértala a cuadrática y resuelva usando la fórmula.

Problema 8. McDonald's despacha órdenes en $T = 3x^2 - 12x + 7$. Use la fórmula general para hallar x cuando el tiempo T es de 2 minutos.

Problema 9. Universidad de Lima evalúa una viga de soporte. El pandeo cero ocurre en $y^2 - 5y + 3 = 0$. Halle las raíces irracionales con fórmula.

Problema 10. PUCP diseña un circuito RLC donde la impedancia cero está en $s^2 + 2s + 5 = 0$. Calcule las raíces imaginarias conjugadas del sistema.

Problema 11. Netzun modela la retención de cursos con $100 = 4t^2 + 24t$. Complete el cuadrado para hallar el mes t de abandono máximo.

Problema 12. El British Council califica fluidez con una parábola $S = -2x^2 + 16x$. Complete cuadrados para encontrar el puntaje base óptimo en Speaking.

Problema 13. Interactive Brokers calcula volatilidad como $V = x^2 - x - 1 = 0$. Esta ecuación define la Proporción Áurea. Halle la raíz positiva con fórmula.

Problema 14. Rappi Pro reduce sus rutas expresadas en $d^2 - 1{,}5d - 2{,}5 = 0$. Use la fórmula general para calcular la distancia máxima rentable en km.

Problema 15. BCP emite micro-créditos con riesgo $R = 0{,}01x^2 - 0{,}2x - 3$. Calcule la cantidad x donde el riesgo es cero usando fórmula.

Problema 16. Un bus de Civa en ruta a Abancay adelanta a otro. La separación temporal es $t^2 - \frac{5}{2}t - \frac{3}{2} = 0$. Halle t en horas.

Problema 17. Un agricultor cerca un corral apoyado en un río (3 lados). Área $A = x(100 - 2x) = 800$. Complete el cuadrado para hallar dimensiones.

Problema 18. Un proyector proyecta una imagen de $(x + 3)$ por $(x + 2)$. Si el área es 56 m^2, plantee y resuelva la cuadrática.

Problema 19. Para un cable colgante, la tensión mínima está en $T = 0{,}5x^2 - 4x + 10$. Complete el cuadrado para hallar el punto horizontal x.

Problema 20. La trayectoria de un láser es $y = -0{,}02x^2 + x$. ¿A qué distancia horizontal x el láser incide a una altura $y = 8$? (Fórmula general).

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $1, -11$
2. $3, -1/2$
3. $\Delta = -44$ (Complejas)
4. $6, 2$
5. $-2, -3$
6. $1, -5$
7. $3, 1/2$
8. $1, -7$
9. $3 \pm \sqrt{7}$
10. $3/2$ ($\Delta = 0$, raíz única)
11. $\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$
12. $\frac{-1\pm\sqrt{6}}{5}$
13. Complejas conjugadas $1 \pm 2i$
14. $V(5, -1)$
15. $\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$
16. $5, -1$
17. $1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2}i$
18. $\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$
19. 2 (-3 es extraña)
20. Centro en $(2, -3)$, $r^2 = 16$

Propuestos de Aplicación

1. $5 \pm \sqrt{5}$
2. 6 y 2 seg
3. $\approx 2{,}18$ seg
4. 16 m
5. 4 (y $-1{,}5$ descartado)
6. Max en $x = 20$
7. $x = 1 \pm \sqrt{3}$
8. $x = \frac{6\pm\sqrt{21}}{3}$
9. $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$
10. $-1 \pm 2i$
11. Mes $t = 3{,}09$ approx.
12. Puntaje óptimo en $x = 4$
13. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$
14. $d = 2{,}5$ km
15. $x = 30$
16. $t = 3$ horas
17. Lado $x = 10$ o 40
18. $x = 5$ metros
19. $x = 4$
20. $x = 10$ o $x = 40$ metros

¡Llegaste al Final!

’Completar el cuadrado es completar el entendimiento. La fórmula te da la respuesta, pero el proceso te da la sabiduría.’

- Tu futuro matemático

¡Sigue superando los límites! Tu dominio del álgebra ya es de nivel universitario.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com