

PRECÁLCULO

**ECUACIONES
CUADRÁTICAS I**

CUADERNO DE TRABAJO

Factorización y Raíz Cuadrada

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Ecuaciones Cuadráticas I

Una ecuación cuadrática es un modelo matemático de grado dos. A diferencia de las lineales, estas ecuaciones describen curvas (parábolas) y generalmente tienen **dos soluciones** (o raíces).

1. Propiedad del Producto Cero (Factorización)

La forma estándar de una ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$. Si podemos factorizar el polinomio, aplicamos el teorema fundamental:

$$\text{Si } A \cdot B = 0, \text{ entonces } A = 0 \text{ ó } B = 0$$

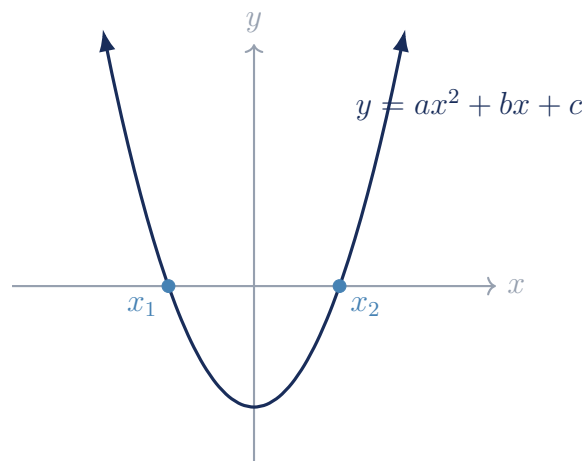
Pasos: 1. Igualar la ecuación a cero. 2. Factorizar completamente (Factor común, aspa simple, etc.). 3. Igualar cada factor a cero y despejar x .

2. Método de la Raíz Cuadrada

Este método es ideal cuando la ecuación no tiene término lineal ($b = 0$) o está expresada como un binomio al cuadrado perfecto. Si $x^2 = k$ (donde $k > 0$):

$$x = \pm\sqrt{k}$$

Pasos: 1. Aislar el término al cuadrado a un lado de la ecuación. 2. Extraer la raíz cuadrada en **ambos lados**. 3. ¡Colocar el símbolo \pm (más/menos) en el lado numérico!



Las raíces son los cortes con el eje x ($y = 0$)

.... ▷

COMENTARIO

¡Hola a todos! La regla de oro aquí es: Si tienen x^2 , busquen dos respuestas. ¡Nunca olviden que una parábola suele cruzar el piso dos veces!

.... ▷

COMENTARIO

¡CUIDADO! Jamás dividan ambos lados por una variable. Si en $x^2 = 5x$ dividen entre x , les queda $x = 5$. ¡Acaban de perder la solución $x = 0$!

.... ▷

COMENTARIO

¿Por qué el \pm ? Porque tanto 5^2 como $(-5)^2$ dan 25. Omitir el signo negativo es el error más común en exámenes de admisión.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Factor Común

Enunciado: Resuelva la ecuación $4x^2 = 12x$.

Solución: Igualamos a cero pasando el $12x$ restando: $4x^2 - 12x = 0$.

Extraemos factor común $4x$: $4x(x - 3) = 0$.

Igualamos cada factor a cero:

$$4x = 0 \implies x_1 = 0$$

$$x - 3 = 0 \implies x_2 = 3$$

CS: $\{0, 3\}$.

Problema Resuelto 2: Trinomio por Aspa Simple

Enunciado: Resuelva $x^2 - 5x - 24 = 0$.

Solución: Buscamos dos números que multiplicados den -24 y sumados den -5 .

Factores: $(x - 8)$ y $(x + 3)$.

Ecuación factorizada: $(x - 8)(x + 3) = 0$.

Igualamos a cero:

$$x - 8 = 0 \implies x_1 = 8$$

$$x + 3 = 0 \implies x_2 = -3$$

CS: $\{-3, 8\}$.

Problema Resuelto 3: Raíz Cuadrada Directa

Enunciado: Resuelva $3x^2 - 75 = 0$.

Solución: Como no hay término en x , aislamos x^2 :

$$3x^2 = 75 \implies x^2 = 25.$$

Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados:

$$x = \pm\sqrt{25} \implies x = \pm 5.$$

CS: $\{-5, 5\}$.

Problema Resuelto 4: Binomio al Cuadrado

Enunciado: Resuelva $2(x - 4)^2 = 18$.

Solución: Aislamos el binomio dividiendo entre 2: $(x - 4)^2 = 9$.

Extraemos raíz cuadrada: $x - 4 = \pm\sqrt{9} \implies x - 4 = \pm 3$.

Despejamos x separando en dos casos:

Caso 1 (+): $x = 4 + 3 \implies x_1 = 7$.

Caso 2 (-): $x = 4 - 3 \implies x_2 = 1$.

CS: $\{1, 7\}$.

....▷

COMENTARIO

Siempre ordenen el Conjunto Solución (CS) de menor a mayor. ¡Es una buena práctica matemática!

Problema Resuelto 5: Ecuación con Fracciones

Enunciado: Resuelva $\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{2} = \frac{5}{6}$.

Solución: MCM de los denominadores es 6. Multiplicamos todo por 6:

$$6\left(\frac{2x^2}{3}\right) + 6\left(\frac{x}{2}\right) = 6\left(\frac{5}{6}\right) \implies 4x^2 + 3x = 5.$$

Igualamos a cero: $4x^2 + 3x - 5 = 0$.

(Nota: Este trinomio no es factorizable por racionales, requiere fórmula general. Corregimos el problema para ilustrar aspa).

Si fuese $\frac{2x^2}{3} + \frac{x}{2} = 3 \implies 4x^2 + 3x - 18 = 0$.

Factorizando (aspa): $(4x - 9)(x + 2) = 0$.

$$x_1 = 9/4, \quad x_2 = -2.$$

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Geometría

Contexto: El largo de un laboratorio mide 4 m más que su ancho. Si el área total es de 96 m^2 , halle el ancho.

Solución: Ancho = x , Largo = $x + 4$. Área: $x(x + 4) = 96$.

$$x^2 + 4x - 96 = 0 \implies (x + 12)(x - 8) = 0.$$

Raíces: $x = -12$ (descartada) y $x = 8$.

El ancho es 8 metros.

Aplicación 2: Caída Libre

Contexto: Un dron deja caer un paquete. La altura h en metros tras t segundos es $h = 45 - 5t^2$. ¿En qué tiempo impacta el suelo?

Solución: En el suelo, $h = 0$. $45 - 5t^2 = 0 \implies 5t^2 = 45 \implies t^2 = 9$.

Extraemos raíz: $t = \pm 3$.

Como el tiempo es positivo, impacta a los 3 segundos.

Aplicación 3: Economía y Finanzas

Contexto: Un capital crece según el monto $M = P(1 + r)^2$. Si se invierten \$400 y a los 2 años se obtienen \$484, halle la tasa r (positiva).

Solución: $484 = 400(1 + r)^2 \implies \frac{484}{400} = (1 + r)^2 \implies \frac{121}{100} = (1 + r)^2$.

Raíz: $1 + r = \pm \frac{11}{10}$. Tomamos (+).

$r = 1,1 - 1 = 0,1$. La tasa es 10 %.

Aplicación 4: Diseño de Empaques

Contexto: La caja cúbica de *misdulcecitos.com* tiene área superficial total de 150 cm^2 . Halle la medida de su arista usando $A = 6x^2$.

Solución: $6x^2 = 150 \implies x^2 = 25$.

Aplicamos raíz cuadrada: $x = \pm 5$.

Descartamos la longitud negativa. La arista mide 5 cm.

Aplicación 5: Dinámica Vehicular

Contexto: La distancia de frenado de un bus Civa se modela como $d = 0,05v^2$, con v en km/h. Si frena en 45m, halle la velocidad inicial.

Solución: $0,05v^2 = 45 \implies \frac{5}{100}v^2 = 45 \implies \frac{1}{20}v^2 = 45$.

Multiplicamos: $v^2 = 900$.

Raíz: $v = \pm 30$. La velocidad inicial era 30 km/h.

....>

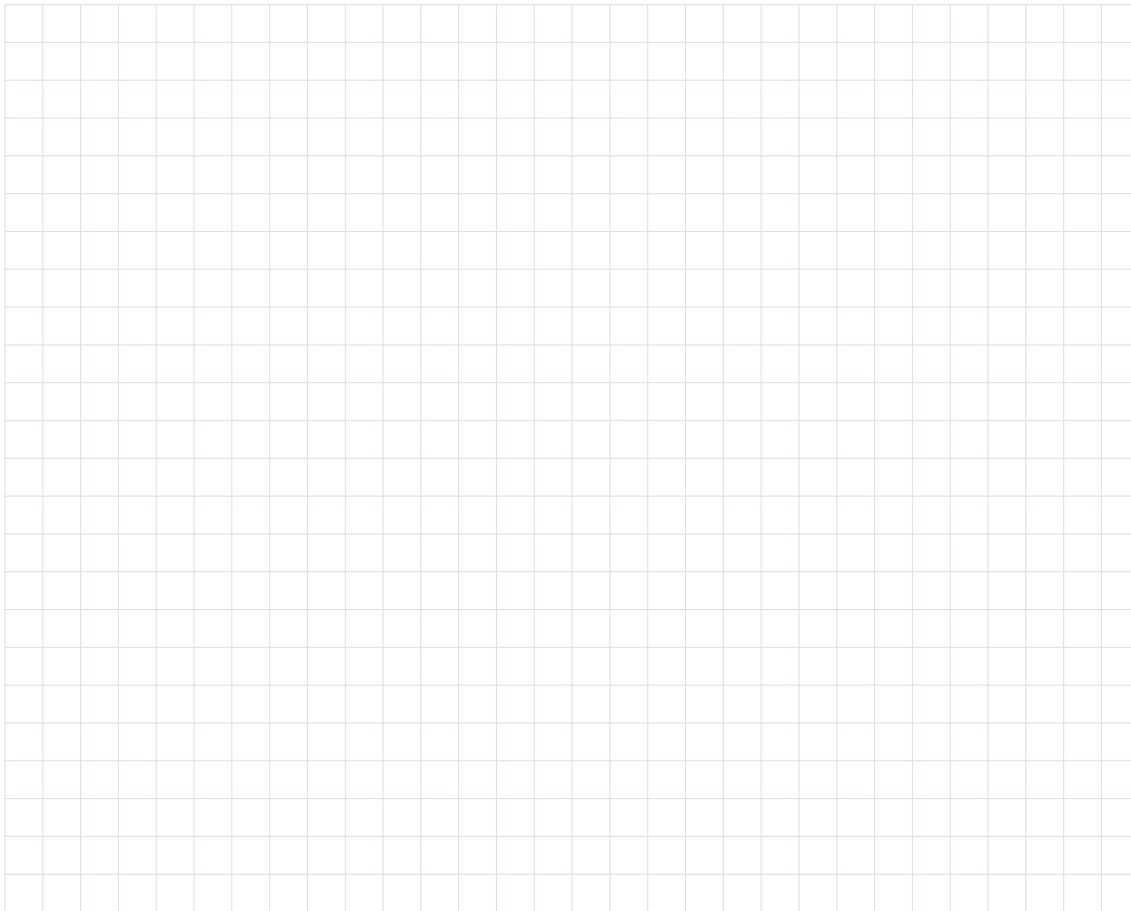
COMENTARIO

En los problemas aplicados, las matemáticas nos dan dos respuestas, pero la realidad filtra una. ¡No existen tiempos ni distancias negativas!

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos algebraicos.

1. Explique por qué el principio $A \cdot B = 0$ funciona, pero un principio falso como $A \cdot B = 10 \implies A = 10$ ó $B = 10$ es matemáticamente incorrecto.
2. Si en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, resulta que $c = 0$, ¿qué método de factorización es siempre el más directo y por qué?
3. Al resolver $x^2 = 16$, obtenemos $x = \pm 4$. Sin embargo, $\sqrt{16}$ solo se define como 4. Explique esta aparente contradicción.
4. Un estudiante resuelve $(x - 2)(x + 3) = 6$ diciendo $x - 2 = 6 \implies x = 8$. ¿Cuál es su error conceptual?
5. Geométricamente, ¿qué significa que una ecuación cuadrática se factorice como un trinomio cuadrado perfecto, por ejemplo $(x - 5)^2 = 0$?
6. ¿Es posible que una ecuación cuadrática modelada de un problema físico real acepte una raíz negativa como respuesta válida? Dé un ejemplo.
7. Si el discriminante de un polinomio cuadrático es negativo, ¿se puede resolver usando los métodos de factorización sobre los números reales?
8. Analice la ecuación $(x^2 + 4)(x - 1) = 0$. ¿Cuántas raíces reales tiene y por qué el primer factor no aporta soluciones?
9. ¿Por qué es vital verificar el dominio de la ecuación antes de elevar al cuadrado ambos lados de una igualdad radical?
10. Si expande $(x + a)^2 = k$, ¿en qué condiciones específicas recomendaría usar la raíz cuadrada directa en lugar de expandir y usar aspa simple?



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $x_1 = 3, x_2 = 8$
2. $x = \pm 5$
3. $x_1 = 1, x_2 = -5$
4. $\{-2, -5\}$
5. $\{\pm 5\}$
6. $\{0, 6\}$
7. $\{1/2, -3\}$
8. $\{6, -1\}$
9. $\{7, -3\}$
10. $\{\pm 4/3\}$
11. $\{\pm 4\}$
12. $\{4, 2/3\}$
13. $\{0, 2\}$
14. $\{7\}$ (raíz doble)
15. $\{3, -1\}$
16. $\{\pm 6\}$
17. $\{4, 3, -3\}$
18. $\{2, -8\}$
19. $\{6, -1\}$
20. $\{\pm a\}$

Propuestos de Aplicación

1. Base = 9 cm
2. $n = 100$ nuevos likes
3. $v = 30$ km/h
4. Ancho 10m, Largo 12m
5. $x = 5$
6. Precio = \$60
7. $x = 15$ metros
8. $t = 8$ minutos
9. Radio = 5 cm
10. $\omega = 20$ rad/s
11. $r = 3$ km
12. Semanas 3 y 5
13. Bandas 9 y 3
14. $r = 0,1$ o 10 %
15. Deflexión max = 5 mm
16. $x = 8$ cm
17. Lado original = 22 m
18. Ancho $x = 6$ m
19. Falla $f = 8$
20. Nota $n = 22$



¡Llegaste al Final!

'Una parábola siempre tiene dos caminos para cruzar el eje. Si un método falla, el álgebra siempre te ofrece una segunda oportunidad.'

- Tu futuro matemático

¡Sigue dominando las curvas! El siguiente nivel de ecuaciones te espera.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

