

$$\Rightarrow x = a \vee x = -a$$

PRECÁLCULO

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

CUADERNO DE TRABAJO
Planteamiento de Casos y Resolución

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

$$|x| \geq 0$$

Teoría: Ecuaciones con Valor Absoluto

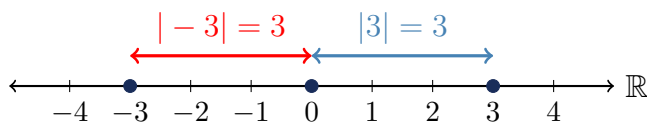
El valor absoluto mide la **distancia** de un número al origen (cero) en la recta numérica. Como es una distancia, **jamás puede ser negativo**. Para resolver estas ecuaciones, debemos "liberar" a la variable de sus barras analizando los casos posibles.

1. Definición Formal

El valor absoluto de un número real x , denotado por $|x|$, se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Nota: El "-x" no significa que el resultado sea negativo; si x es negativo (ej. -3), entonces $-(-3) = 3$ (positivo).



.... ▷

COMENTARIO

¡Chicos! El valor absoluto de -5 es 5 . ¿Por qué? Porque estás a 5 "pasos" del cero. Nunca decimos "caminé -5 metros", ¿verdad?

2. Teoremas Fundamentales (Planteamiento de Casos)

Caso A: Igualado a una constante positiva

Si $|x| = a$ y sabemos que $a \geq 0$, entonces la ecuación se divide en dos caminos lógicos:

$$x = a \quad \vee \quad x = -a$$

Si te sale $|x| = -4$, ¡detente! El conjunto solución es vacío (\emptyset).

Caso B: Igualado a una variable (Restricción del Universo)

Si $|x| = y$, primero debemos garantizar que el resultado sea no negativo. 1. **Universo:** $y \geq 0$ 2. **Resolución:** $x = y \quad \vee \quad x = -y$ Al final, cruza tus respuestas con el Universo. Descartarás las falsas.

Caso C: Igualdad de dos Valores Absolutos

Si $|x| = |y|$, como ambos lados son siempre positivos, no hay restricciones de universo. Se resuelve directamente:

$$x = y \quad \vee \quad x = -y$$

.... ▷

COMENTARIO

Peligro letal: Si tienen $|2x - 1| = x + 4$, no se lancen a resolver a lo loco. ¡Primero anoten $x + 4 \geq 0$! Es el error más común en parciales.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Ecuación Básica

Enunciado: Resuelva $|3x - 5| = 7$.

Solución: Como $7 \geq 0$, aplicamos el Teorema A (dos caminos):

Camino 1: $3x - 5 = 7 \implies 3x = 12 \implies x = 4$.

Camino 2: $3x - 5 = -7 \implies 3x = -2 \implies x = -2/3$.

C.S. = $\{-2/3, 4\}$.

Problema Resuelto 2: Universo Restringido

Enunciado: Resuelva $|x - 2| = 2x - 7$.

Solución: 1. **Universo:** $2x - 7 \geq 0 \implies x \geq 3,5$.

2. **Casos:**

- $x - 2 = 2x - 7 \implies 5 = x$. (¿Es $5 \geq 3,5$? Sí, válida).

- $x - 2 = -(2x - 7) \implies x - 2 = -2x + 7 \implies 3x = 9 \implies x = 3$.

(¿Es $3 \geq 3,5$? NO. Descartamos $x = 3$).

C.S. = $\{5\}$.

Problema Resuelto 3: Doble Valor Absoluto

Enunciado: Resuelva $|4x + 1| = |2x - 5|$.

Solución: Teorema C. No hay restricciones de universo.

- Igualdad directa: $4x + 1 = 2x - 5 \implies 2x = -6 \implies x = -3$.

- Igualdad opuesta: $4x + 1 = -(2x - 5) \implies 4x + 1 = -2x + 5 \implies 6x = 4 \implies x = 2/3$.

C.S. = $\{-3, 2/3\}$.

Problema Resuelto 4: Cuadrática en el Interior

Enunciado: Resuelva $|x^2 - 5x| = 6$.

Solución: Dos ecuaciones cuadráticas:

1) $x^2 - 5x = 6 \implies x^2 - 5x - 6 = 0 \implies (x - 6)(x + 1) = 0 \implies x = 6 \vee x = -1$.

2) $x^2 - 5x = -6 \implies x^2 - 5x + 6 = 0 \implies (x - 3)(x - 2) = 0 \implies x = 3 \vee x = 2$.

C.S. = $\{-1, 2, 3, 6\}$.

....>

COMENTARIO

¿Ven por qué el Universo es vital? Sin él, hubieran dado por válida la respuesta $x = 3$. Si reemplazan 3 arriba: $|1| = -1$. ¡Falso!

Problema Resuelto 5: Valor Absoluto Anidado (Avanzado)

Enunciado: Resuelva $||x - 3| - 2| = 5$.

Solución: Resolvemos de afuera hacia adentro:

$$|x - 3| - 2 = 5 \quad \vee \quad |x - 3| - 2 = -5$$

$$|x - 3| = 7 \quad \vee \quad |x - 3| = -3$$

La segunda es absurda ($|A| = -3$, **C.S.** = \emptyset). Solo seguimos la primera:

$$|x - 3| = 7 \implies x - 3 = 7 \implies x = 10 \quad \vee \quad x - 3 = -7 \implies x = -4.$$

$$\mathbf{C.S.} = \{-4, 10\}.$$

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Tolerancia en Manufactura

Contexto: Una máquina de corte láser fabrica piezas de metal. El grosor ideal es 15 mm. Se permite una tolerancia que define el pase de control si $|x - 15| = 0,5$. Halle los grosores límite.

Solución: $x - 15 = 0,5 \implies x = 15,5$ mm.

$x - 15 = -0,5 \implies x = 14,5$ mm.

Los grosores extremos permitidos son 14,5 y 15,5 mm.

Aplicación 2: Agricultura Termorregulada

Contexto: Un invernadero mantiene el clima estable. La alarma de riesgo suena si la temperatura T (Celsius) difiere de 22°C según el modelo $|T - 22| = 2T - 40$. Calcule T .

Solución: Universo: $2T - 40 \geq 0 \implies T \geq 20$.

C1: $T - 22 = 2T - 40 \implies T = 18$ (Descartado, $18 < 20$).

C2: $T - 22 = -2T + 40 \implies 3T = 62 \implies T \approx 20,67$.

La alarma suena a $20,67^\circ\text{C}$.

Aplicación 3: Química y Soluciones

Contexto: En un laboratorio, una solución tampón debe mantener neutralidad. Un reactivo provoca una fluctuación crítica donde la desviación cumple $|pH - 7,0| = 0,3$. Halle los niveles alcanzados.

Solución: $pH - 7,0 = 0,3 \implies pH = 7,3$.

$pH - 7,0 = -0,3 \implies pH = 6,7$.

Los niveles de acidez y alcalinidad extrema son 6,7 y 7,3.

Aplicación 4: Rendimiento Atlético

Contexto: Un corredor de élite planea pasar por el kilómetro 30 a los 100 minutos. Su margen de ritmo proyectado sigue la ecuación $|t - 100| = 2,5$. ¿Cuáles son sus tiempos extremos?

Solución: $t - 100 = 2,5 \implies t = 102,5$ minutos.

$t - 100 = -2,5 \implies t = 97,5$ minutos.

Los márgenes de llegada son 97,5 y 102,5 minutos.

....▷

COMENTARIO

En la ciencia, los errores de medición siempre se modelan con valor absoluto. No importa si mediste de más o de menos, lo que cuenta es qué tan lejos te fuiste del valor real.

Aplicación 5: Sismología Estructural

Contexto: Un sismógrafo registra vibraciones de suelo. La amplitud A (mm) activa un freno estructural si satisface $|A - 15| = 3A - 45$. Determine la amplitud exacta.

Solución: Universo: $3A - 45 \geq 0 \implies A \geq 15$.

C1: $A - 15 = 3A - 45 \implies 2A = 30 \implies A = 15$.

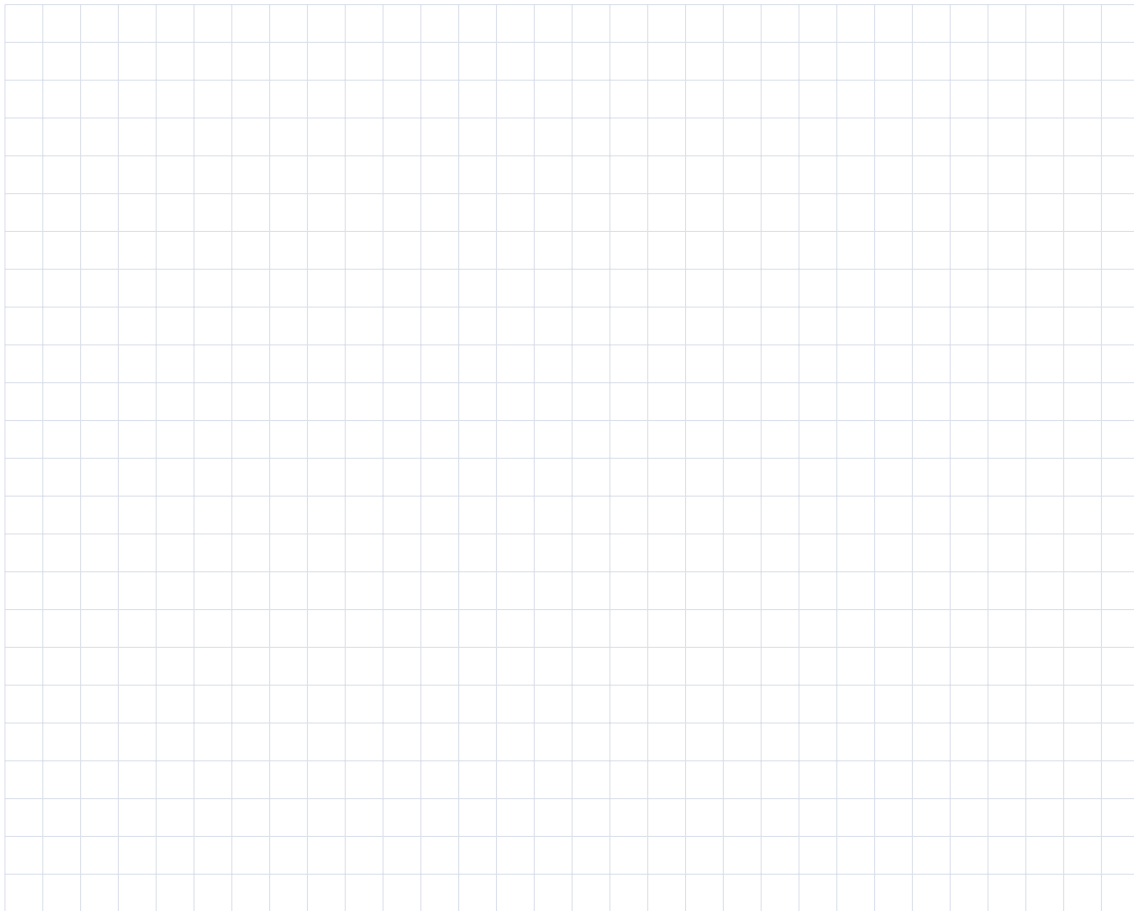
C2: $A - 15 = -3A + 45 \implies 4A = 60 \implies A = 15$.

La alerta se dispara exactamente con una amplitud de 15 mm.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos algebraicos.

1. Si la distancia entre una coordenada x y el número 5 es exactamente 0, escriba la ecuación en términos de valor absoluto. ¿Cuántas soluciones tiene?
2. ¿Por qué la ecuación $|x^2 + 4| = -2$ no requiere ningún cálculo para afirmar que su conjunto solución es vacío?
3. Demuestre usando la definición por tramos por qué $|-x| = |x|$ para cualquier número real.
4. Un estudiante resuelve $|x - 1| = x - 1$ y concluye que $x = 1$. ¿Es la única solución? Explique el concepto de Universo en este caso.
5. Al elevar al cuadrado la ecuación $|x| = 3$, obtenemos $x^2 = 9$. ¿Es este método siempre válido para eliminar el valor absoluto? ¿Qué peligro conlleva si es $|x| = x - 2$?
6. Explique con un ejemplo por qué la afirmación $|A + B| = |A| + |B|$ **no** siempre es verdadera (Desigualdad Triangular).
7. Si $k < 0$, ¿cuántos puntos de intersección existen entre la gráfica de $y = |x|$ y la recta horizontal $y = k$?
8. Analice la ecuación $||x| + 5| = 3$. Sin resolver los casos anidados, explique por qué no tiene solución en \mathbb{R} .
9. En un entorno físico, si $|v|$ representa la rapidez (magnitud de la velocidad), ¿qué significaría resolver $|v| = 20$ en términos de movimiento bidireccional?
10. Compare la resolución geométrica versus algebraica de $|x - 2| = 4$. ¿Cómo se visualiza en la recta numérica real?



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. 16, -4
2. 3, -1/3
3. -3, -1
4. 7, -17
5. 4, -4/3
6. \emptyset (Sin solución)
7. 3, 1
8. 6 (4/3 se descarta)
9. 3, 2/3
10. 4, -16
11. 4, -2/3
12. 3, -1 (Las otras son complejas)
13. 6, 0
14. \emptyset
15. 6, -6, 2, -2
16. 3, -3/2
17. 3, -3, 2, -2
18. 2, -3
19. 5, -1, 5/3, 1
20. Suma de soluciones reales = 8

Propuestos de Aplicación

1. 9,2 y 6,8 m/s
2. 135 y 105 mmHg
3. $h = 390$ km
4. 55 y 45 mm
5. 5,5 y 2,5 m
6. 255 y 245 ohmios
7. $P = 5500$ tons
8. $\approx 119,16$ y 100 dB
9. $w = 25$ km/h
10. 220 y 180 ms
11. 120 y 60 metros
12. 3200 y 2800 galones
13. $h = 110$ cm
14. 75 y 37,5 micrómetros
15. 45 y 35 L/min
16. \emptyset (No hay intervención posible)
17. 165 y 135 metros
18. 110 y 83,3 MHz
19. $P = 8$ atm
20. 32 y 19,2 metros

|Éxito|

¡Misión Cumplida!

'No importa si tu esfuerzo actual parece tener valor negativo en el plano de las emociones. El universo matemático del valor absoluto nos enseña que toda distancia recorrida hacia tu meta, ¡es un avance positivo!'

- Tu futuro imbatible

¡Felicidades por llegar hasta aquí! Tienes todo el potencial para dominar cualquier ecuación.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

