PRECÁLCULO

ECUACIONES CON RADICALES

CUADERNO DE TRABAJO

Identificación de Raíces Extrañas

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Ecuaciones con Radicales

Las ecuaciones con radicales son aquellas donde la incógnita se encuentra atrapada bajo el signo de una raíz. Para liberarla, usamos la operación inversa: la potenciación. Sin embargo, este proceso oculta un peligro matemático invisible conocido como **raíces extrañas**.

1. El Principio de la Potencia

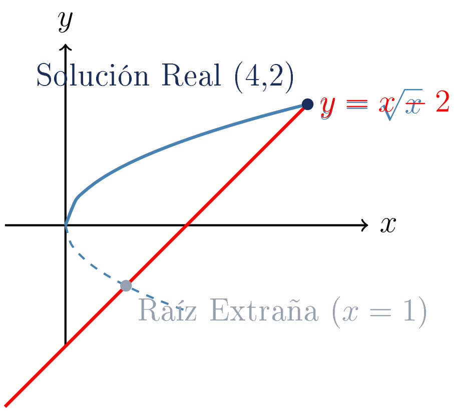
Si $A = B$, entonces $A^n = B^n$ para cualquier entero n.
Elevando ambos lados de una ecuación a la misma potencia, eliminamos el radical. Por ejemplo, si $\sqrt{x} = 5$, entonces $(\sqrt{x})^2 = 5^2 \implies x = 25$.

PROFE TEO

¡Ojo aquí! Elevar al cuadrado es como hacer un trato con el diablo matemático. Te da la respuesta, pero a veces te cuela "soluciones fantasma".

2. El Peligro: Raíces Extrañas

Elevar al cuadrado (o a cualquier potencia par) puede generar soluciones que resuelven la nueva ecuación polinómica, **pero NO la ecuación original con radicales**. Estas se llaman **raíces extrañas**.
¿Por qué ocurre? Porque al elevar al cuadrado, destruimos el signo original. Por ejemplo: $x = -3 \implies x^2 = 9$. Si partimos de $x^2 = 9$ e intentamos regresar, obtenemos $x = 3$ y $x = -3$, creando un valor falso.



PROFE TEO

Si el índice de la raíz es **impar** (como la raíz cúbica $\sqrt[3]{x}$), NO se generan raíces extrañas. El problema es exclusivo de los índices pares.

3. Estrategia de Resolución (Paso a Paso)

1. **Aislar:** Deje un radical solo en un lado de la ecuación.
2. **Elevar:** Eleve ambos lados al índice del radical (al cuadrado, al cubo, etc.).
3. **Resolver:** Resuelva la ecuación polinómica resultante. (Si aún quedan radicales, repita el paso 1 y 2).
4. **¡VERIFICAR!:** Sustituya CADA solución en la ecuación **original**. Si causa una contradicción (ej. $3 = -3$) o hace que el interior de una raíz par sea negativo, **descartela**.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema 1: Radical Simple

Enunciado: Resuelva $\sqrt{3x+1} - 4 = 0$.
Solución: Aislamos el radical: $\sqrt{3x+1} = 4$.
Elevamos al cuadrado: $(\sqrt{3x+1})^2 = 4^2 \implies 3x + 1 = 16$.
Resolvemos: $3x = 15 \implies x = 5$.
Verificación: $\sqrt{3(5)+1} - 4 = \sqrt{16} - 4 = 4 - 4 = 0$. (Verdadero).
C.S. $= \{5\}$.

Problema 2: Aparición de Raíz Extraña

Enunciado: Resuelva $\sqrt{x-1} = x - 7$.
Solución: Elevamos al cuadrado: $x - 1 = (x-7)^2 \implies x - 1 = x^2 - 14x + 49$.
Igualamos a cero: $x^2 - 15x + 50 = 0$.
Factorizamos: $(x-10)(x-5) = 0 \implies x = 10$ ó $x = 5$.
Verificación:
Para $x = 10$: $\sqrt{9} = 10 - 7 \implies 3 = 3$ (Verdadero).
Para $x = 5$: $\sqrt{4} = 5 - 7 \implies 2 = -2$ (FALSO, el radical principal asume signo positivo).
Por lo tanto, $x = 5$ es una **raíz extraña**. **C.S.** $= \{10\}$.

PROFE TEO
¡Este es el clásico error de examen! Muchos marcan la clave $\{5, 10\}$. Siempre, SIEMPRE reemplacen sus respuestas en la ecuación inicial.

Problema 3: Dos Radicales (Doble Elevación)

Enunciado: Resuelva $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$.
Solución: Aislamos uno: $\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+1}$.
Elevamos al cuadrado ambos lados: $2x + 3 = 1 + 2\sqrt{x+1} + (x+1)$.
Simplificamos y aislamos el radical restante: $x + 1 = 2\sqrt{x+1}$.
Elevamos al cuadrado nuevamente: $x^2+2x+1 = 4(x+1) \implies x^2 - 2x - 3 = 0$.
Factorizamos: $(x-3)(x+1) = 0 \implies x = 3$ ó $x = -1$.
Verificación: Ambas cumplen. **C.S.** $= \{3, -1\}$.

Problema 4: Radicales de Índice Impar

Enunciado: Resuelva $\sqrt[3]{2x-5} = 3$.
Solución: Como es raíz cúbica, elevamos al cubo: $(\sqrt[3]{2x-5})^3 = 3^3$.
$2x - 5 = 27 \implies 2x = 32 \implies x = 16$.
Verificación: $\sqrt[3]{32-5} = \sqrt[3]{27} = 3$. (Verdadero). **C.S.** $= \{16\}$.

Problema 5: Sustitución Algebraica

Enunciado: Resuelva $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.
Solución: Hacemos un cambio de variable: $u = \sqrt{x}$. Por lo tanto $u^2 = x$.
La ecuación queda: $u^2 - 5u + 6 = 0 \implies (u-3)(u-2) = 0$.
Tenemos $u = 3$ y $u = 2$.
Volvemos a x: $\sqrt{x} = 3 \implies x = 9$. Y $\sqrt{x} = 2 \implies x = 4$.
Verificación: Ambas satisfacen la ecuación original. **C.S.** $= \{4, 9\}$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Geometría en Empaques

Contexto: En *misdulcecitos.com*, la diagonal de la base de una caja temática cuadrada mide $\sqrt{2x+8}$ cm. Si por diseño la diagonal es x cm, halle x.
Solución: $\sqrt{2x+8} = x \implies 2x+8 = x^2 \implies x^2 - 2x - 8 = 0$.
Factorizamos: $(x-4)(x+2) = 0 \implies x = 4, x = -2$.
Descartamos $x = -2$ (una distancia no es negativa). **Rpta:** 4 cm.

Aplicación 2: Caída Libre (Física)

Contexto: Un dron del IMCA UNI calcula el tiempo de impacto de una carga soltada como $t = \sqrt{\frac{h}{5}}$. Si tarda $t = h - 20$ segundos, halle la altura h.
Solución: $h - 20 = \sqrt{\frac{h}{5}} \implies (h-20)^2 = \frac{h}{5} \implies h^2 - 40h + 400 = \frac{h}{5}$.
$5h^2 - 201h + 2000 = 0$. Factorizando: $(h-25)(5h-80) = 0$.
$h = 25$ o $h = 16$. Verificando $h = 16$: tiempo negativo (falso). **Rpta:** 25 m.

PROFE TEO
Las raíces extrañas aparecen en la vida real. En el Problema 2, el dron no puede viajar atrás en el tiempo. ¡La matemática nos protege de romper la física!

Aplicación 3: Redes Neuronales y Retención

Contexto: Netzun modela la retención de sus cursos donde el porcentaje P obedece a $\sqrt{10P} - 5 = \frac{P}{2}$. Halle P exacto.
Solución: $\sqrt{10P} = \frac{P}{2} + 5 = \frac{P+10}{2}$. Elevando: $10P = \frac{P^2+20P+100}{4}$.
$40P = P^2 + 20P + 100 \implies P^2 - 20P + 100 = 0$.
$(P-10)^2 = 0 \implies P = 10$.
Rpta: Retención del 10 %.

Aplicación 4: Algoritmos de Tráfico Web

Contexto: La latencia del servidor de nuestro grupo en Facebook se modela con $L = \sqrt{3x-2}$. Si la latencia iguala al tráfico x, determine x.
Solución: $\sqrt{3x-2} = x \implies 3x - 2 = x^2 \implies x^2 - 3x + 2 = 0$.
Factorizando: $(x-2)(x-1) = 0$.
Valores: $x = 2$ o $x = 1$. Ambos verifican positivamente.
Rpta: Tráfico en niveles 1 o 2.

Aplicación 5: Cinemática y Viajes

Contexto: El bus de Civa hacia Abancay tiene un consumo $C = x - \sqrt{x+6}$ galones. Halle x para que el consumo sea cero.
Solución: $x - \sqrt{x+6} = 0 \implies x = \sqrt{x+6}$.
Elevamos: $x^2 = x + 6 \implies x^2 - x - 6 = 0$.
$(x-3)(x+2) = 0 \implies x = 3$ o $x = -2$.
Verificando: si $x = -2$, $-2 = \sqrt{4} = 2$ (falso). **Rpta:** $x = 3$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda con justificaciones matemáticas breves.

1. ¿Por qué elevar ambos lados de una ecuación al cubo nunca introduce raíces extrañas?
2. Si al resolver una ecuación con radicales obtiene como solución $x = -4$ y al reemplazar queda $\sqrt{16} = -4$, ¿por qué se descarta matemáticamente esta raíz?
3. Al tener la ecuación $\sqrt{A} + \sqrt{B} = -2$, ¿es necesario elevar al cuadrado para saber que no tiene solución en los números reales? Justifique.
4. Un estudiante resuelve $\sqrt{x} = x$ dividiendo entre $\sqrt{x}$ y obtiene $1 = \sqrt{x} \implies x = 1$. ¿Qué solución perdió y por qué su método es arriesgado?
5. Si el dominio de una ecuación es $x \geq 5$ y al resolver la cuadrática resultante obtiene $x = 3$ y $x = 7$, ¿puede descartar automáticamente una sin reemplazar en la ecuación original?
6. Explique la diferencia entre resolver $x^2 = 25$ y evaluar $\sqrt{25}$. ¿Por qué el primero tiene dos soluciones y el segundo solo una?
7. Si en la ecuación $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x-5}$, ambos lados se elevan al cuadrado, se obtiene $x = -6$. Sin verificar, ¿qué nos dice el dominio original sobre este resultado?
8. Cuando resolvemos ecuaciones de la forma $x^{2/3} = 4$, ¿debemos esperar generar raíces extrañas? ¿Por qué?
9. La gráfica de $y = \sqrt{x+2}$ y la recta $y = -x$ se intersectan en el vacío. Si las igualamos algebraicamente, ¿qué ocurrirá con las soluciones halladas?
10. ¿De qué manera la sustitución de variables (ej. $u = \sqrt{x}$) nos ayuda a evitar la pérdida accidental del dominio durante la resolución?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Resuelva la ecuación $\sqrt{4x-3}=5$.

Guía de Solución Interactiva

1. Eleva ambos lados al cuadrado:
$(\sqrt{4x-3})^2=(5)^2 \implies 4x-3=$ ____

2. Resuelve la ecuación lineal:
$4x=$ ____ $\implies x=$ ____

3. Verifica en la original: $\sqrt{4(\_\_\_\_)-3}=$ ____.
C.S. $=\{$______$\}$

Problema 2. Resuelva e identifique raíces extrañas en $\sqrt{x+2}=x$.

Guía de Solución Interactiva

1. Eleva al cuadrado y forma la cuadrática:
$x+2=x^2 \implies x^2-x-2=0$

2. Factoriza y halla las raíces posibles:
$(x-$ ____$)(x+$ ____$)=0 \implies x_1=$ ____, $x_2=$ ____

3. Verifica: Si $x=-1$, $\sqrt{-1+2}=-1 \implies 1=-1$ (Falso).
Raíz extraña: ____. C.S. $=\{$______$\}$

Problema 3. Resuelva la ecuación con índice impar $\sqrt[3]{5x+2}=-2$.

Guía de Solución Interactiva

1. Eleva ambos lados al cubo:
$5x+2=(-2)^3 \implies 5x+2=$ ____

2. Despeja la variable x:
$5x=$ ____ $\implies x=$ ____

3. Escribe el conjunto solución directamente (índice impar no genera extrañas):
C.S. $=\{$______$\}$

PROFE TEO
Acostúmbrense a poner el resultado entre llaves {} para indicar que es un Conjunto Solución. ¡Es notación formal!

Problemas Generales (Nivel Medio a Avanzado)

Problema 4. Resuelva: $\sqrt{3x+4} = 4$.

Problema 5. Resuelva descartando raíces extrañas: $\sqrt{2x+15} = x$.

Problema 6. Resuelva: $\sqrt{x-3} + 5 = x$.

Problema 7. Halle las soluciones reales de: $\sqrt[3]{x^2-1} = 2$.

Problema 8. Resuelva elevando dos veces al cuadrado: $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$.

Problema 9. Determine el C.S. de: $x = \sqrt{2-x}$.

Problema 10. Resuelva usando un cambio de variable: $x - 4\sqrt{x} - 5 = 0$.

Problema 11. Resuelva la ecuación: $\sqrt{x^2-5x+4} = x - 2$.

Problema 12. Halle x en: $\sqrt{3x} + \sqrt{12x} = 6$.

Problema 13. Identifique la raíz extraña en: $\sqrt{5x-1} = \sqrt{x} + 1$.

Problema 14. Resuelva: $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = 3$.

Problema 15. Determine el conjunto solución de: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$.

Problema 16. Resuelva: $(x+2)^{1/2} + x(x+2)^{1/2} = 0$.

Problema 17. Halle las soluciones reales de: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{5}{2}$.

Problema 18. Resuelva la ecuación fraccionaria: $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$.

Problema 19. Determine el C.S. de: $\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{4x - 12}$.

Problema 20. Resuelva el sistema implícito: $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} = 3$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. En *misdulcecitos.com*, el tiempo térmico T de un pastel obedece $\sqrt{T+3} = T - 3$. Halle el tiempo real y descarte errores físicos.

Guía de Solución Interactiva

1. Eleva al cuadrado: $T + 3 = (T-3)^2 \implies T + 3 = T^2 - 6T + 9$
2. Forma cuadrática y resuelve: $T^2 - \_\_\_\_ T + \_\_\_\_ = 0 \implies T = 6$ ó $T = 1$.
3. Verifica: Si $T = 1$, $\sqrt{4} = -2$ (Imposible).
Tiempo real $T =$ ________

Problema 2. Rappi Pro reduce tiempos con un modelo radial $d = \sqrt{2d + 15}$. Calcule la distancia óptima d en km.

Guía de Solución Interactiva

1. Eleva: $d^2 = 2d + 15 \implies d^2 - 2d - 15 = 0$
2. Factoriza: $(d - \_\_\_\_)(d + \_\_\_\_) = 0 \implies d_1 = 5, d_2 = -3$.
3. Descarta la distancia negativa.
Distancia $d =$ ________ km.

Problema 3. BCP evalúa perfiles crediticios. Si el riesgo R cumple $3 = \sqrt[3]{R - 8}$, halle R directamente.

Guía de Solución Interactiva

1. Al ser raíz impar, eleva al cubo sin temor a extrañas:
$3^3 = (\sqrt[3]{R-8})^3 \implies \_\_\_\_ = R - 8$
2. Despeja el riesgo R:
$R = \_\_\_\_ + 8 \implies R = \_\_\_\_$

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Newton College diseña una rampa donde su soporte central obedece $x = \sqrt{5x-4}$. Determine las dos ubicaciones viables x (en metros).

Problema 5. Un bus Civa a Abancay sufre desgaste de llantas D. Si $D = \sqrt{4D+5}$, halle el coeficiente de desgaste real.

Problema 6. La cola en McDonald's decrece según $P = \sqrt{P}+2$. Usando cambio de variable, halle las personas P restantes.

Problema 7. En *clasesvirtuales.net*, la latencia se bloquea si $t - \sqrt{t} = 0$. ¿En qué instantes de tiempo t se produce el bloqueo?

Problema 8. KFC pronostica que las ventas de sus combos crecen bajo $\sqrt{V-2} = V-4$. Calcule el volumen V real.

Problema 9. En *matematicasmedicina.com*, el volumen celular V respeta $\sqrt{2V-1}+2 = V$. Evalúe y descarte la célula anómala.

Problema 10. Interactive Brokers modela rebotes financieros. Un activo corrige a precio p donde $\sqrt{p+12} = p$. Halle el precio estable.

Problema 11. Norky's optimiza parrillas. El carbón rinde k horas tal que $\sqrt{k}+\sqrt{k-5}=5$. Determine k.

Problema 12. La PUCP prueba un servo motor. Su voltaje crítico v dispara si $v-3=\sqrt{30-2v}$. ¿Cuál es ese voltaje?

Problema 13. El British Council estandariza la prueba Speaking. Si el puntaje S cumple $\sqrt{2S}=\sqrt{S+1}+1$, halle el score S.

Problema 14. IMCA UNI calibra sensores. La señal x es nítida si $\frac{3}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}-2$. Halle el valor de señal.

Problema 15. Admisión Villarreal usa un factor corrector F en pruebas: $\sqrt{F}-\frac{2}{\sqrt{F}}=1$. Halle la corrección aplicada.

Problema 16. Universidad de Lima evalúa vigas. La tensión T es nula cuando $\sqrt[3]{T^2-7T+12}=0$. Halle los valores críticos.

Problema 17. Un dron mapea distancias en topografía. Si $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}=3$, halle la coordenada x del objetivo.

Problema 18. MatematicaNS reporta clicks orgánicos diarios c (en miles) que satisfacen $\sqrt{c+7}-\sqrt{c}=1$. Calcule c.

Problema 19. Netzun ofrece bonos de minutos m. El bono se valida si $\sqrt{m-4}=\sqrt{m}-2$. Halle los minutos asignados.

Problema 20. En *mathmockexams.com*, el número de descargas d crashea la base de datos si $\sqrt{d^2-8}=d-2$. Determine d.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. 7
2. 2 (-1 extraña)
3. -2
4. 4
5. 5 (-3 extraña)
6. 7 (4 extraña)
7. $3, -3$
8. 4
9. 1 (-2 extraña)
10. 25 (1 extraña)
11. 0 (Dominio de la ecuación)
12. 4
13. $x = 1$. (La extraña es $x = 0$)
14. $2, -1$
15. 3
16. $-2, -1$
17. $1/4, 4$
18. 4
19. 3
20. 5

Propuestos de Aplicación

1. $T = 6$
2. $d = 5$
3. $R = 35$
4. $x = 4, x = 1$
5. $D = 5$
6. $P = 4$ (1 extraña)
7. $t = 0, t = 1$
8. $V = 6$ (3 extraña)
9. $V = 5$ (1 anómala/extraña)
10. $p = 4$
11. $k = 9$
12. $v = 7$ (-3 extraña)
13. $S = 8$ (o 0 que genera $0 = 2$ falso)
14. $x = 9$ (-1 extraña/física imposible)
15. $F = 4$
16. $T = 3, T = 4$
17. $x = 2$
18. $c = 9$
19. $m = 4$
20. $d = 3$

¡Misión Cumplida!

'Las matemáticas, como la vida, a veces nos presentan ilusiones. Aprender a verificar y descartar las falsas soluciones es lo que te convierte en un verdadero maestro.'

- Tu futuro analítico

¡Excelente trabajo! Dominar las raíces extrañas te ahorrará muchos puntos vitales en tus próximos exámenes.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com