PRECÁLCULO

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

CUADERNO DE TRABAJO

División Larga y División Sintética

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Desarmando Expresiones

La división de polinomios nos permite simplificar expresiones, encontrar raíces y analizar asíntotas racionales. El **Algoritmo de la División** establece que si dividimos un polinomio $P(x)$ entre $D(x)$, obtenemos un cociente $Q(x)$ y un residuo $R(x)$ tal que: $P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$.

PROFE TEO

¡Cuidado con los términos fantasma! Si el polinomio es $x^3 - 8$, debes reescribirlo como $x^3 + 0x^2 + 0x - 8$. Si no rellenas con ceros, las columnas colapsarán.

1. División Larga (El método universal)

Funciona para **cualquier** divisor polinomial.

1. **Ordena** ambos polinomios de mayor a menor grado, rellenando con ceros los términos faltantes.
2. **Divide** el primer término del dividendo entre el primero del divisor.
3. **Multiplica** ese resultado por todo el divisor.
4. **Resta** (cambia los signos) y baja el siguiente término. Repite hasta que el grado del residuo sea menor al del divisor.

PROFE TEO

La división sintética exige que el divisor sea lineal y mónico $(x - c)$. Si el divisor es $x + 3$, el valor que pones en la caseta es $c = -3$. ¡Invierte el signo siempre!

2. División Sintética (El método veloz)

Es un atajo exclusivo para divisores de la forma $\boldsymbol{x - c}$.

1. Escribe el valor $\boldsymbol{c}$ en la esquina izquierda (recuerda cambiar el signo del divisor).
2. Escribe solo los **coeficientes** del dividendo (con sus ceros).
3. **Baja** el primer coeficiente directamente.
4. **Multiplica** el número bajado por c y **suma** el resultado a la siguiente columna. Repite. El último número es el residuo.

Esquema Sintético: $(2x^3 - 5x + 3) \div (x - 2)$

$$
\begin{array}{c|cccc}
2 & 2 & 0 & -5 & 3 \\
\hline
 & & 4 & 8 & 6 \\
 & 2 & 4 & 3 & 9
\end{array}
$$

Cociente: $2x^2 + 4x + 3$ Resto

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: División Larga (Ceros Ocultos)

Enunciado: Divida $(x^3 - 27) \div (x - 3)$.
Esquema de Solución:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 + 3x + 9 \\
x - 3 & x^3 + 0x^2 + 0x - 27 \\
\hline
 & -(x^3 - 3x^2) \\
 & \quad 3x^2 + 0x \\
 & \quad -(3x^2 - 9x) \\
 & \qquad 9x - 27 \\
 & \qquad -(9x - 27) \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Cociente: $x^2 + 3x + 9$. **Residuo:** 0.

Problema Resuelto 2: División Sintética Básica

Enunciado: Realice sintética para $(4x^3 - 2x^2 + x - 5) \div (x + 1)$.
Esquema de Solución:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 4 & -2 & 1 & -5 \\
\hline
 & & -4 & 6 & -7 \\
 & 4 & -6 & 7 & -12
\end{array}
$$

Cociente: $4x^2 - 6x + 7$. **Residuo:** -12.

Problema Resuelto 3: Sintética con Fracciones

Enunciado: Divida $(2x^3 + 5x^2 - x + 2) \div (2x + 1)$.
Esquema de Solución: Igualamos $2x + 1 = 0 \implies c = -1/2$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-1/2 & 2 & 5 & -1 & 2 \\
\hline
 & & -1 & -2 & 1{,}5 \\
 & 2 & 4 & -3 & 3{,}5
\end{array}
$$

Dividimos coeficientes del cociente temporal entre 2.
Cociente real: $x^2 + 2x - 3/2$. **Residuo:** $7/2$.

PROFE TEO
Si el divisor es lineal pero no mónico, como $2x - 1$, usa sintética con $c = 1/2$. ¡Pero cuidado! Al final debes dividir todos los coeficientes del cociente resultante entre 2.

Problema Resuelto 4: Variable Oculta en Sintética

Enunciado: Halle k para que $(x^3 - kx^2 + 2x + 8)$ sea divisible por $(x - 2)$.
Esquema de Solución: Divisible significa residuo 0. Usamos $c = 2$.

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & -k & 2 & 8 \\
 & & 2 & 4-2k & 12-4k \\
\hline
 & 1 & 2-k & 6-2k & 20-4k
\end{array}$$

$20 - 4k = 0 \implies 4k = 20 \implies k = 5$.

Problema Resuelto 5: Divisor No Lineal

Enunciado: Halle cociente y resto de $(x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1) \div (x^2 + 1)$.
Esquema de Solución: (Obligatorio usar división larga)

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
x^2 + 1 & x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1 \\
\hline
 & -(x^4 + x^2) \\
 & -x^3 + x^2 + x \\
 & -(-x^3 - x) \\
 & x^2 + 2x - 1 \\
 & -(x^2 + 1) \\
 & 2x - 2
\end{array}$$

Cociente: $x^2 - x + 1$. **Residuo:** $2x - 2$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Geometría Rectangular

Contexto: Un panel solar posee un área definida por $A(x) = x^3+4x^2-5x-14$. Su base métrica mide $B(x) = x - 2$. Extraiga el polinomio de su altura.
Esquema de Solución: Altura $= A(x) \div B(x)$. $c = 2$.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 4 & -5 & -14 \\ \hline & & 2 & 12 & 14 \\ & 1 & 6 & 7 & 0 \end{array}$$

Respuesta: La altura es $x^2 + 6x + 7$.

Aplicación 2: Análisis de Costos

Contexto: El costo total ensamblando placas rige por $C(u) = 3u^3 - 5u^2 + 8u - 10$. El volumen de paquetes producidos es $u - 1$. Estime el gasto unitario por paquete.
Esquema de Solución: Dividimos usando $c = 1$.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & -5 & 8 & -10 \\ \hline & & 3 & -2 & 6 \\ & 3 & -2 & 6 & -4 \end{array}$$

Respuesta: Costo unitario de $3u^2 - 2u + 6$ con remanente de -4.

Aplicación 3: Cinemática Vehicular

Contexto: La distancia recorrida por un monopatín obedece $D(t) = 2t^3 + 7t^2 - 4t$. El tiempo cronometrado es $t + 4$. Calcule la expresión que representa la velocidad constante.
Esquema de Solución: Velocidad = Distancia / Tiempo. $c = -4$.

$$\begin{array}{c|cccc} -4 & 2 & 7 & -4 & 0 \\ \hline & & -8 & 4 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

Respuesta: La velocidad se expresa como $2t^2 - t$.

PROFE TEO

En el mundo real, los residuos no siempre son ceros. Un residuo de -4 en una función de costos puede interpretarse como un saldo a favor o un margen de ganancia sobrante.

Aplicación 4: Volumen de un Cilindro

Contexto: Un depósito cilíndrico marca un volumen de $V(h) = h^4 - 16$. Su área transversal circular mide $h^2 + 4$. Extraiga la profundidad total del estanque.
Esquema de Solución: Profundidad $= V(h) \div A(h)$. Larga.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad h^2 - 4 \\
h^2 + 4 & \quad h^4 + 0h^3 + 0h^2 + 0h - 16 \\
\hline
 & -(h^4 + 4h^2) \\
 & \qquad -4h^2 + 0h - 16 \\
 & \qquad -(-4h^2 - 16) \\
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Respuesta: La profundidad del estanque equivale a $h^2 - 4$.

Aplicación 5: Absorción Metabólica

Contexto: La energía quemada por un organismo suma $E(x) = x^3 - 10x^2 + 25x - 5$. La tasa de procesamiento celular es $x - 5$. Formule el rendimiento metabólico.
Esquema de Solución: Sintética con $c = 5$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
5 & 1 & -10 & 25 & -5 \\
 & & 5 & -25 & 0 \\
\hline
 & 1 & -5 & 0 & -5
\end{array}
$$

Respuesta: Rendimiento $x^2 - 5x$, con remanente de -5.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico.

1. Al aplicar división sintética a $(x^3 + 5x - 2) \div (x - 1)$, un alumno anota los coeficientes como "1, 5, -2". Identifique y corrija su error fundamental.
2. Explique por qué es absolutamente imposible utilizar división sintética tradicional si el divisor es $x^2 - 3x + 2$.
3. Si el residuo de una división polinómica es cero, ¿qué relación geométrica o algebraica se establece entre el dividendo y el divisor?
4. En el algoritmo de la división $P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$, analice la condición obligatoria que debe cumplir el grado del residuo $R(x)$ respecto a $D(x)$.
5. Si dividimos un polinomio de grado 7 entre un polinomio de grado 3, ¿cuál será exactamente el grado del cociente resultante? Justifique.
6. Demuestre lógicamente por qué dividir entre $(2x-4)$ y usar $c = 2$ en la caseta sintética arroja respuestas infladas al doble, exigiendo una corrección final.
7. ¿Qué papel juega el Teorema del Residuo cuando evaluamos $P(c)$ en vez de realizar toda la división sintética extensa?
8. Al realizar división larga, cambiamos sistemáticamente los signos de la fila inferior para proceder a sumar. ¿A qué operación aritmética tradicional equivale este paso?
9. Si dividimos $x^5 - 1$ entre $x - 1$, el cociente es $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Explique la regularidad de este patrón polinomial.
10. Analice: Si la función de velocidad de un objeto genera un residuo distinto de cero al ser dividida por el tiempo, ¿la velocidad puede considerarse uniforme?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Realice la división sintética: $(2x^3 - x^2 + 4x - 7) \div (x - 3)$.

Guía de Solución Interactiva

Rellena el siguiente esquema sintético con $c = 3$:

$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 2 & -1 & 4 & -7 \\
 & & \square & \square & \square \\
\hline
 & 2 & \square & \square & \square
\end{array}
$$

Problema 2. Divida usando división larga: $(x^2 + 5x + 6) \div (x + 2)$.

Guía de Solución Interactiva

Rellena la estructura de la división larga:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \square \\
\hline
x+2 & x^2+5x+6 \\
 & \underline{\square} \\
 & \quad \square \\
 & \quad \underline{\square} \\
 & \qquad \square
\end{array}
$$

Problema 3. Realice sintética para $(x^4 - 16) \div (x + 2)$.

Guía de Solución Interactiva

Aplica ceros de relleno y completa la caseta:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\
 & & \square & \square & \square & \square \\
\hline
 & 1 & \square & \square & \square & \square
\end{array}
$$

PROFE TEO

No intentes usar división sintética con polinomios mixtos de varias variables como $x^3y - y^3$. Limítate a usar división larga estándar, organizando por una variable principal.

Problemas Generales

Problema 4. Divida sintéticamente $(x^3 - 4x^2 + 2x + 5) \div (x - 2)$.

Problema 5. Halle el resto de $(3x^4 - 2x^2 + x - 1) \div (x + 1)$.

Problema 6. Use división larga para $(x^3 - x^2 - x + 10) \div (x^2 - x + 2)$.

Problema 7. Halle cociente y residuo de $(2x^3 - 7x^2 + 5) \div (x - 3)$.

Problema 8. Simplifique dividiendo $(x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 1) \div (x + 3)$.

Problema 9. Aplique división sintética en $(4x^4 - 3x^2 + 1) \div (x - 1/2)$.

Problema 10. Determine m para que $(x^3 - mx^2 + 5x - 4)$ deje resto 6 al dividir por $x - 1$.

Problema 11. Realice división larga de $(x^5 + 3x^3 - 2x) \div (x^2 + 1)$.

Problema 12. Divida $(6x^3 - 5x^2 + 4x - 1) \div (3x - 1)$ usando sintética (ajustando al final).

Problema 13. Halle el residuo de $(x^{100} - 2x^{50} + 1) \div (x - 1)$ sin efectuar la división completa.

Problema 14. Divida $(x^4 - y^4) \div (x - y)$ considerando 'y' como constante.

Problema 15. Halle el cociente de $(2x^3 + x^2 - 13x + 6) \div (2x - 3)$.

Problema 16. Determine si $(x + 4)$ es factor de $(x^3 + 6x^2 + 5x - 12)$ verificando el resto nulo.

Problema 17. Divida larga: $(x^4 + 2x^3 - x - 2) \div (x^2 + 2x + 1)$.

Problema 18. Aplique sintética dos veces sucesivas para dividir $(x^4 - 5x^2 + 4) \div ((x - 1)(x + 2))$.

Problema 19. Calcule el residuo de $(x^3 - (a + b)x^2 + abx + 5) \div (x - a)$.

Problema 20. Divida $(x^6 - 64) \div (x^2 - 4)$ combinando cambio de variable y división sintética.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un convoy transporta tonelaje masivo modelado por $T(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$. Posee vagones numerados bajo $v = x - 1$. Derive la carga individual seccionada.

Guía de Solución Interactiva

Completa la sintética con $c = 1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & \square & \square & \square \\ \hline & 1 & \square & \square & \square \end{array}$$

Problema 2. El dron gastó batería equivalente a $E(t) = 2t^3 + 3t^2 - 2t - 3$. Voló por rachas de $t + 1$. Aísle la eficiencia eléctrica consumida ininterrumpidamente.

Guía de Solución Interactiva

Aplica la estructura sintética evaluando $c = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 3 & -2 & -3 \\ & & \square & \square & \square \\ \hline & 2 & \square & \square & \square \end{array}$$

Problema 3. Un servidor administra picos de tráfico $S(h) = h^4 - 16$. El ancho de banda filtra paquetes $h - 2$. Detecte el flujo resultante procesado limpio.

Guía de Solución Interactiva

Recuerda los ceros fantasmas. Resuelve el esquema:

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ & & \square & \square & \square & \square \\ \hline & 1 & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La lente del telescopio capta espectros $L(f) = f^3 - 3f^2 + f - 3$. La refracción purifica $f - 3$. Encuentre la onda visual neta sin distorsión espacial.

Problema 5. Un sistema de riego inunda hectáreas abarcando $I(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x$. Las zanjas desvían $x - 2$. Constate el caudal de aspersión distribuido efectivamente.

Problema 6. Una solución química precipita sales valuadas en $Q(s) = 4s^3 + 8s^2 - s - 2$. El matraz decanta volumen $s + 2$. Formule la concentración de soluto filtrado.

Problema 7. La presión hidráulica presiona válvulas bajo $P(v) = v^3 + 8$. El calibre del tubo resiste expansiones $v + 2$. Precise la tensión hidrostática tolerada residualmente.

Problema 8. El aerogenerador gira produciendo $W(r) = 3r^4 - 5r^3 + 2r^2 - r + 1$. Las ráfagas impulsan aspas $r - 1$. Evalúe el torque cinético conservado estructuralmente.

Problema 9. El láser industrial quema placas radiando $R(p) = p^5 - 32$. La rejilla interpone barreras $p - 2$. Simplifique la intensidad de corte focalizado resultante.

Problema 10. Un puente atirantado tensa cables soportando $T(m) = 2m^3 - 5m^2 - 4m + 3$. Los pilares fragmentan fuerzas $m - 3$. Revele la fatiga metálica segmentada.

Problema 11. Las frecuencias de audio emiten $A(z) = z^4 - 10z^2 + 9$. El amplificador modula graves $z + 3$. Extraiga el espectro sonoro nítido reproducido.

Problema 12. El disipador térmico extrae calor $H(q) = q^3 - q^2 - q + 1$. Los ventiladores enfrían fases $q - 1$. Estructure la refrigeración termodinámica estabilizada remanente.

Problema 13. La sonda orbital acelera quemando combustible $V(k) = k^3 + 4k^2 - 3k - 18$. La ignición fase uno desecha masa $k - 2$. Deduzca la propulsión de escape generada.

Problema 14. El cableado de fibra transmite bits cifrados $B(n) = n^4 + n^3 - n - 1$. El router decodifica tramas $n + 1$. Descifre el ancho de banda transferido limpidamente.

Problema 15. La bóveda criptográfica resguarda algoritmos sumando $C(k) = k^5 + k^4 + k + 1$. La llave cuántica divide secuencias $k + 1$. Aísle el código base desempaquetado.

Problema 16. Las placas de plomo bloquean radiación gamma absorbiendo $R(y) = y^3 - 7y - 6$. Los dosímetros miden exposición atenuada $y + 2$. Formule el escudo atómico resultante operativo.

Problema 17. Un vector epidémico contagia zonas mapeadas por $E(p) = p^4 - 5p^2 + 4$. La cuarentena aísla cuadrantes $p - 1$. Modele la infección endémica contenida geográficamente.

Problema 18. La inmersión del submarino desplaza fluido $F(d) = d^3 - d^2 - 14d + 24$. Los tanques de lastre purgan $d - 3$. Indique la densidad barométrica sumergida equilibrada.

Problema 19. El estanque cultiva algas floreciendo biomasa $M(w) = w^3 + 6w^2 + 11w + 6$. Las mallas recogen cosechas de $w + 3$. Calcule la pureza biológica extraída finalmente.

Problema 20. Los paneles fotovoltaicos acopian voltios $V(s) = s^4 - s^3 - s^2 - s - 2$. El inversor convierte corriente $s - 2$. Identifique el amperaje continuo inyectado al tendido.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $c = 3$; Sumas parciales. Resto: 50.
2. $x + 3$. Resto 0.
3. $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$. Resto 0.
4. Cociente $x^2 - 2x - 2$. Resto 1.
5. Resto -5 (Teorema del Residuo).
6. Cociente x, Resto $-3x + 10$.
7. Cociente $2x^2 - x - 3$, Resto -4.
8. $x^3 - 2x + 5$, Resto -16.
9. $4x^3 + 2x^2 - 2x - 1$, Resto $1/2$.
10. $m = -4$.
11. Cociente $x^3 + 2x$, Resto $-4x$.
12. $2x^2 - x + 1$, Resto 0.
13. Resto 0.
14. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$.
15. $x^2 + 2x - 2$, Resto 0.
16. Sí, resto 0.
17. $x^2 - 1$, Resto -1.
18. $x^2 - x - 2$, Resto 0.
19. Resto 5.
20. $x^4 + 4x^2 + 16$, Resto 0.

Propuestos de Aplicación

1. $x^2 - 5x + 6$
2. $2t^2 + t - 3$
3. $h^3 + 2h^2 + 4h + 8$
4. $f^2 + 1$
5. $x^3 + 3x$
6. $4s^2 - 1$
7. $v^2 - 2v + 4$
8. $3r^3 - 2r^2 - 1$ (Resto 0)
9. $p^4 + 2p^3 + 4p^2 + 8p + 16$
10. $2m^2 + m - 1$
11. $z^3 - 3z^2 - z + 3$
12. $q^2 - 1$
13. $k^2 + 6k + 9$
14. $n^3 - 1$
15. $k^4 + 1$
16. $y^2 - 2y - 3$
17. $p^3 + p^2 - 4p - 4$
18. $d^2 + 2d - 8$
19. $w^2 + 3w + 2$
20. $s^3 + s^2 + s + 1$

$\lfloor R(x) \rfloor$

¡Llegaste al Final!

’Un residuo no es un fracaso o un sobrante inútil; es la pieza exacta que te enseña qué debes corregir para encajar a la perfección en el siguiente nivel.’

- La sabiduría del algoritmo

¡Felicidades! Has fragmentado estructuras inmensas con división larga y dominado el atajo veloz de la sintética. Todo gran problema siempre puede reducirse.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com