

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

**DIFERENCIABILIDAD
VS. CONTINUIDAD**

CUADERNO DE TRABAJO

Puntos Angulosos y Tangentes Verticales

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: La Suavidad de las Curvas

En cálculo, solemos estudiar funciones "bien portadas", es decir, aquellas cuyas gráficas no presentan cortes ni cambios bruscos de dirección. El teorema principal que relaciona estos conceptos dicta que la **diferenciabilidad implica continuidad**, pero el recíproco **no** es cierto.

1. El Teorema Fundamental

Si una función f es diferenciable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

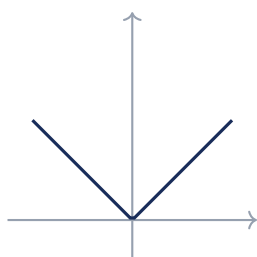
$$\text{Diferenciabilidad} \implies \text{Continuidad}$$

Por contraposición, si una función **no** es continua en c , automáticamente **no** es diferenciable en c .

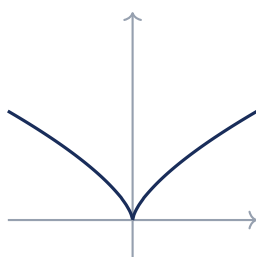
2. ¿Dónde falla la Diferenciabilidad?

Una función continua puede fallar en ser diferenciable en $x = c$ de tres formas principales:

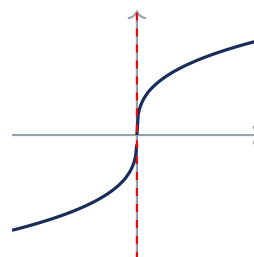
1. **Punto Anguloso (Esquina):** Los límites laterales del cociente diferencial existen, pero son distintos. Ej: $f(x) = |x|$.
2. **Cúspide (Pico):** Los límites laterales del cociente diferencial tienden al infinito, uno a $+\infty$ y el otro a $-\infty$. Ej: $f(x) = x^{2/3}$.
3. **Tangente Vertical:** El límite del cociente diferencial tiende a $+\infty$ o $-\infty$ por ambos lados simultáneamente. Ej: $f(x) = x^{1/3}$.



Punto Anguloso
 $f'(c^-) \neq f'(c^+)$



Cúspide
 $f'(c^\pm) = \pm\infty$



Tangente Vertical
 $f'(c) = \infty$

....▷

PROFE TEO

¡Atención aquí! Piensa en la continuidad como *no levantar el lápiz* y en la diferenciabilidad como *no hacer giros bruscos*. Toda curva suave es continua, pero no toda curva continua es suave.

....▷

PROFE TEO

Si ves una raíz con índice impar y exponente menor adentro (como $\sqrt[3]{x}$ o $\sqrt[3]{x^2}$), las alarmas deben sonar: en la raíz de su argumento se esconde un comportamiento vertical.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: El Clásico Punto Anguloso

Enunciado: Determine si $f(x) = |x - 2|$ es diferenciable en $x = 2$.

Solución: Evaluamos los límites laterales del cociente diferencial en $x = 2$: Límite por la derecha ($h \rightarrow 0^+$):

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|(2+h) - 2| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Límite por la izquierda ($h \rightarrow 0^-$):

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|(2+h) - 2| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Como $1 \neq -1$, $f'(2)$ no existe. Es continua, pero presenta un punto anguloso en $x = 2$.

....>

PROFE TEO

Recuerda evaluar siempre primero la continuidad. Si una función da un salto en $x = a$, ni te molestes en buscar la derivada; matemáticamente ya está descalificada.

Problema Resuelto 2: Tangente Vertical

Enunciado: Demuestre que $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es diferenciable en el origen.

Solución: Planteamos la derivada por definición en $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0+h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{1/3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}}$$

Como $h \rightarrow 0$, el denominador $h^{2/3} = (h^2)^{1/3}$ es siempre positivo y se aproxima a cero. Por tanto, el límite es $+\infty$. La función es continua pero posee una **tangente vertical** en $x = 0$.

Problema Resuelto 3: La Cúspide Matemática

Enunciado: Analice la derivabilidad de $f(x) = x^{2/3}$ en $x = 0$.

Solución: Evaluamos en la definición de derivada:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(0+h)^{2/3} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{2/3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1/3}}$$

Si $h \rightarrow 0^+$, el límite es $+\infty$. Si $h \rightarrow 0^-$, el límite es $-\infty$. Como las tangentes se dirigen hacia infinito pero con signos opuestos, se forma un "pico" ^afilado conocido geoméricamente como **cúspide**. No es diferenciable.

Problema Resuelto 4: Parámetros para la Diferenciabilidad

Enunciado: Halle los valores de a y b para que $f(x)$ sea diferenciable en todo \mathbb{R} : $f(x) = \{ax^2 + 1 \text{ si } x \leq 1; bx - 3 \text{ si } x > 1\}$.

Solución: 1. **Continuidad en $x = 1$:** $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. $a(1)^2 + 1 = b(1) - 3 \implies a + 1 = b - 3 \implies b - a = 4$. 2. **Diferenciabilidad en $x = 1$:** Derivamos ambos tramos y los igualamos. $(ax^2 + 1)' = 2ax$. Evaluado en 1 $\implies 2a$. $(bx - 3)' = b$. Evaluado en 1 $\implies b$. Igualamos derivadas laterales: $2a = b$. 3. Sustituimos $b = 2a$ en la primera ecuación: $2a - a = 4 \implies a = 4$. Por lo tanto $b = 8$.

Problema Resuelto 5: Continua pero con Angulosidad Discreta

Enunciado: Estudie $f(x) = \{x^2 \text{ si } x < 0; x \text{ si } x \geq 0\}$ en $x = 0$.

Solución: Continuidad: $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$. Es continua. Derivabilidad: Derivada lateral izquierda: $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2)' = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0$. Derivada lateral derecha: $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)' = 1$. Como $0 \neq 1$, la gráfica empalma en el origen pero con pendientes distintas. Es un **punto anguloso** oculto en una función a trozos.

....▷

PROFE TEO

Las funciones a trozos son el terreno de prueba favorito para esto. Asegúrate de igualar los valores (continuidad) ANTES de igualar las derivadas. ¡El orden importa!

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Dinámica de Colisiones

Contexto: Un péndulo industrial impacta una barrera registrando una posición $p(t) = |t - 5|$ metros. Demuestre matemáticamente la falla del modelo de velocidad física al cumplirse exactamente el quinto segundo.

Solución: La velocidad es $p'(t)$. En $t = 5$, evaluamos el límite del valor absoluto. Límite derecho es 1 m/s, izquierdo es -1 m/s. **Respuesta:** Existe un punto anguloso, por ende, aceleración infinita instantánea indicando un choque o rebote no diferenciable.

Aplicación 2: Falla de Materiales

Contexto: La deformación estructural de una aleación bajo tensión extrema sigue la curva $\sigma(\epsilon) = \epsilon^{2/3}$. Verifique la estabilidad de la tangente de elasticidad al iniciar la prueba en cero puro.

Solución: Calculamos la derivada $\sigma'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{2/3}}{h} = \frac{1}{h^{1/3}}$. El límite lateral derecho va a $+\infty$, el izquierdo a $-\infty$. **Respuesta:** La aleación experimenta una cúspide estructural. Falla catastrófica de rotura frágil inicial.

Aplicación 3: Óptica de Refracción

Contexto: El índice de refracción de un prisma varía térmicamente según $R(T) = \sqrt[3]{T} - 273$. Precise el comportamiento de la tasa de variación óptica exactamente en el cero absoluto Kelvin.

Solución: Al evaluar $R'(273)$ obtenemos $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$. **Respuesta:** La tasa óptica diverge creando una tangente vertical, sugiriendo un cambio de fase inmedible.

Aplicación 4: Costos Impositivos Abruptos

Contexto: Un software tributario calcula la retención con $I(x) = \{0,1x \text{ si } x \leq 100; 0,5x - 40 \text{ si } x > 100\}$. Evalúe la estabilidad marginal al declarar exactamente cien monedas.

Solución: Continuidad en 100: $0,1(100) = 10$, $0,5(100) - 40 = 10$. Es continua. Diferenciabilidad: derivada lateral izq. es 0,1, derecha es 0,5. **Respuesta:** Existe un punto anguloso fiscal, generando un salto abrupto en la tasa marginal.

....>

PROFE TEO

Las cúspides y tangentes verticales suelen indicar *puntos de rotura* o *transiciones de fase* en modelos físicos y de ingeniería. Son singularidades matemáticas.

Aplicación 5: Propagación de Ondas

Contexto: El perfil transversal de una ola de choque sísmico se modela como $y(x) = x^{4/5}$. Indique la naturaleza del pico de la ola en el epicentro coordenado base cero.

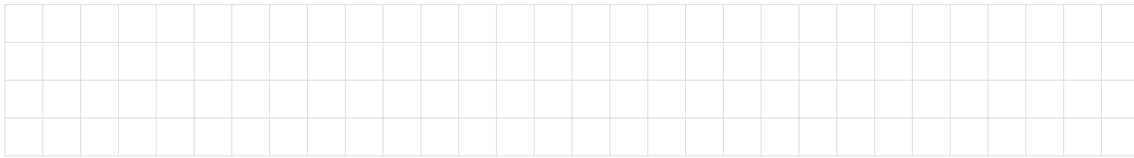
Solución: La derivada es $y'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{4/5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1/5}}$. El límite cambia de signo en cero ($+\infty$ y $-\infty$). **Respuesta:** El epicentro presenta una cúspide matemática aguda, indicando energía concentrada no derivable.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

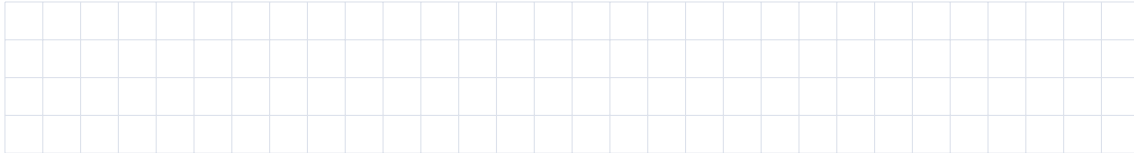
Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. El Teorema Fundamental establece que la diferenciabilidad implica continuidad. Exponga la prueba lógica mediante el cálculo de $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - f(c)]$.
2. Visualice la gráfica de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$. ¿Por qué, a pesar de poder trazar su gráfica sin levantar el lápiz en todo \mathbb{R} , resulta imposible determinar su derivada en el origen?
3. En un entorno físico, si la ecuación de velocidad de un objeto presenta un "punto anguloso" en un tiempo $t = c$, ¿qué implicaciones físicas inmediatas sufre la aceleración del cuerpo?
4. Al evaluar funciones a trozos, muchos estudiantes igualan directamente las derivadas sin verificar la continuidad. Ilustre con un ejemplo por qué este método empírico conduce a resultados catastróficos.
5. Geométricamente, diferencie con precisión el comportamiento de las rectas tangentes laterales que dan origen a una cúspide frente a una "tangente vertical".
6. La función $f(x) = x \sin(1/x)$ es continua en $x = 0$ (asignando $f(0) = 0$). Argumente empleando la definición formal por qué falla drásticamente al intentar derivarla.
7. Analice la proposición: "Si una función posee tangente vertical en $x = a$, entonces su límite lateral en dicho punto es infinito, lo cual significa que es discontinua". Encuentre el error conceptual.
8. ¿Es posible que el producto de dos funciones no diferenciables en $x = a$ resulte en una función que sí sea perfectamente diferenciable en dicho punto? Proponga un contraejemplo.
9. Argumente algebraicamente por qué cualquier polinomio de grado n jamás exhibirá cúspides, puntos angulosos o tangentes verticales en el dominio de los números reales.
10. Evalúe el comportamiento de la función compuesta $f(x) = |\sin x|$ en los múltiplos enteros de π . ¿Qué rasgo geométrico emerge repetidamente en estos intervalos?





Problema 20. Analice rigurosamente la función $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ en $x = 0$. (Con $f(0) = 0$). ¿Es diferenciable?



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. Pto. Anguloso, Derivadas: 1 y -1 .
2. Tangente Vertical. Derivada $\rightarrow +\infty$.
3. Cúspide. Límites a $\pm\infty$.
4. Pto. Anguloso. 2 y -2 .
5. Cúspide en $x = 0$.
6. Tangente Vertical. (Exponente impar $1/5$).
7. Derivable en $x = 0$. $f'(0) = 0$.
8. $k = 0$ (Continua y $2x = 2$).
9. Puntos angulosos en $x = 1$ y $x = -1$.
10. Cúspide (Infinita en 0).
11. a cualquiera, $b = 3$.
12. Pto. Anguloso en 0. (1 y -1).
13. Cúspide en $x = 2$.
14. $c = 1/2$, $d = -3/2$.
15. Sí, Tangente Vertical.
16. No derivable (es discontinua, salto).
17. Cúspides en $x = \pm 2$.
18. Pto. Anguloso en 0.
19. $m = -2\pi$, $n = -\pi^2$.
20. Sí es derivable, $f'(0) = 0$.

Propuestos de Aplicación

1. 0, 1 y -1 , Punto Anguloso.
2. $1/(3T^{2/3})$, 0, Tangente Vertical.
3. π , 1 y -1 , Punto Anguloso.
4. Sí, derivadas en 10 son iguales (100).
5. Cúspide (límite infinito). Falla cerámica.
6. Tangente vertical. Diverge en $c = 0$.
7. Punto anguloso en $x = 4$. Fatiga de salto.
8. Salto de $10 \rightarrow 10$ (continua), $2 \rightarrow 10$ (quiebre).
9. Punto anguloso (1 y -1). Fusibles fundidos.
10. Cúspide en $\tau = 2$. Colapso viscoso.
11. $a = -0,5$, $b = 1,5$. Transición suave.
12. Derivable en 0. Lectura continua perfecta.
13. Punto anguloso. Parpadeo estelar brusco.
14. Tangente vertical asimétrica. Colapso bursátil.
15. Derivable. Tensión uniforme perfecta.
16. Continua y derivadas iguales (6). Sin shock.
17. Cúspide infinita. Quiebre de bloqueo sonoro.
18. Puntos angulosos en 0, 1, -1 .
19. $m = 1$, $n = 5$. Tejido continuo irrompible.
20. Tangente vertical en 100. Fisura estructural.



¡Flujo sin Quiebres!

'La perseverancia pura asegura que te mantengas en el camino (continuidad), pero esta capacidad para moldearte y adaptarte sin resistencia lo que te permite avanzar con velocidad hacia el futuro (diferenciabilidad).'

- La geometría de la suavidad

¡Excelente trabajo analítico! Has aprendido a identificar la diferencia vital entre simplemente conectar puntos y crear verdaderas rutas fluidas.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

