$D(x) \neq 0$

PRECÁLCULO

DETERMINACIÓN DE DOMINIOS

≥ 0

CUADERNO DE TRABAJO

Restricciones por denominadores y raíces pares

$\sqrt[2n]{R(x)}$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Dominio y sus Restricciones

En matemáticas, el **Dominio Máximo** (o Dominio Natural) de una función $f(x)$ es el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión matemática está definida y produce un resultado real. En precálculo, asumimos inicialmente que el dominio son todos los números reales ($\mathbb{R}$), y luego "filtramos"los valores que causan problemas.

1. Restricción por Denominadores (División por Cero)

La división entre cero no está definida en los números reales. Por lo tanto, si una función tiene la forma de una fracción $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, el denominador **jamás** puede ser igual a cero.

- **Condición formal:** $D(x) \neq 0$.
- **Procedimiento:** Igualamos el denominador a cero, resolvemos la ecuación resultante, y excluimos esas raíces del conjunto $\mathbb{R}$.

PROFE TEO
¡Ojo! Las funciones polinómicas (como $y = x^3 - 2x + 5$) no tienen denominadores con variables ni raíces. Su dominio siempre es $\mathbb{R}$. ¡No busques restricciones donde no las hay!

2. Restricción por Raíces de Índice Par

Las raíces cuadradas, cuartas, sextas, etc., de números negativos no existen en el conjunto de los números reales (pertenecen a los números complejos). Si $f(x) = \sqrt[2n]{R(x)}$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$, el interior (radicando) debe ser no negativo.

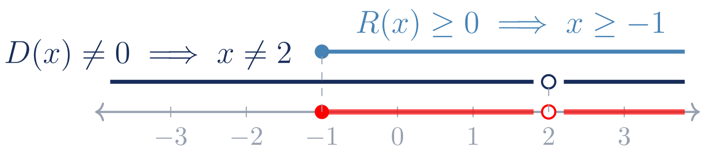
- **Condición formal:** $R(x) \geq 0$.
- **Procedimiento:** Planteamos la inecuación, la resolvemos usando puntos críticos, y el dominio será la unión de los intervalos solución.

PROFE TEO
¡Cuidado! Las raíces de índice impar (como la raíz cúbica $\sqrt[3]{x}$) SÍ aceptan números negativos (ej. $\sqrt[3]{-8} = -2$). Estas NO generan restricciones.

3. Restricciones Combinadas

¿Qué pasa si tenemos una raíz par en el denominador? Por ejemplo: $f(x) = \frac{N(x)}{\sqrt{R(x)}}$.

- La raíz exige $R(x) \geq 0$.
- El denominador exige $\sqrt{R(x)} \neq 0 \implies R(x) \neq 0$.
- **Fusión:** Combinando ambas, la nueva condición estricta es $\boldsymbol{R(x) > 0}$.



Dominio Intersectado: $[-1, 2) \cup (2, +\infty)$

PROFE TEO
Cuando tengas varias restricciones en un mismo problema, halla el dominio de cada parte por separado y al final, ¡intersecta todos los conjuntos! El dominio final es donde todos *están de acuerdo*.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Denominador Cuadrático

Enunciado: Determine el dominio de $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-5x+6}$.
Solución: El denominador no puede ser cero.
$x^2 - 5x + 6 \neq 0$
Factorizamos: $(x-3)(x-2) \neq 0$.
Por lo tanto, $x \neq 3$ y $x \neq 2$.
Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$.

Problema Resuelto 2: Raíz Par con Inecuación Lineal

Enunciado: Halle el dominio de $g(x) = \sqrt{12-4x} + x^2$.
Solución: La restricción solo aplica al radicando de la raíz par.
$12 - 4x \geq 0 \implies 12 \geq 4x \implies 3 \geq x$.
El término polinómico x^2 no aporta restricciones.
Dominio: $\text{Dom}(g) = (-\infty, 3]$.

Problema Resuelto 3: Raíz en el Denominador

Enunciado: Determine el dominio de $h(x) = \frac{5x}{\sqrt[4]{2x-8}}$.
Solución: Al estar una raíz de índice par (4) en un denominador, el interior debe ser estrictamente mayor que cero.
$2x - 8 > 0 \implies 2x > 8 \implies x > 4$.
Dominio: $\text{Dom}(h) = (4, +\infty)$.

Problema Resuelto 4: Valor Absoluto en el Denominador

Enunciado: Halle el dominio de $m(x) = \frac{x-2}{|x-1|-5}$.
Solución: El denominador debe ser diferente de cero.
$|x-1| - 5 \neq 0 \implies |x-1| \neq 5$.
Por propiedad: $x - 1 \neq 5 \implies x \neq 6 \quad \text{y} \quad x - 1 \neq -5 \implies x \neq -4$.
Dominio: $\text{Dom}(m) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 6\}$.

Problema Resuelto 5: Intersección de Múltiples Restricciones

Enunciado: Determine el dominio de $p(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{x^2-9}$.
Solución: 1) Restricción de la raíz (numerador): $x + 4 \geq 0 \implies x \geq -4$.
2) Restricción del denominador: $x^2 - 9 \neq 0 \implies x \neq \pm 3$.
Intersectando: Arrancamos en $[-4, +\infty)$, pero debemos quitar el 3 y el -3 (el -3 está dentro del intervalo).
Dominio: $\text{Dom}(p) = [-4, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Diseño de Tolvas

Contexto: El volumen de salida de grano de una tolva agrícola obedece al modelo $V(r) = \frac{150r}{r^2-25}$, donde r es el radio en cm. Determine los radios operativos matemáticamente posibles asumiendo que $r \geq 0$.
Solución: Restricción: $r^2 - 25 \neq 0 \implies r \neq \pm 5$. Como físicamente $r \geq 0$, el radio no puede ser 5 cm.
Respuesta: El dominio de diseño es $[0, 5) \cup (5, +\infty)$.

····▷
PROFE TEO
En los modelos físicos, el dominio matemático se recorta aún más por la lógica del problema. El tiempo, la longitud y la masa usualmente no pueden ser negativos.

Aplicación 2: Dilatación Térmica

Contexto: La resistencia de una aleación frente al calor extremo decrece según $R(T) = \sqrt{1200 - T}$, donde T es la temperatura en grados Celsius. Determine las temperaturas para las que el material mantiene un comportamiento modelable.
Solución: El radicando no debe ser negativo: $1200 - T \geq 0 \implies 1200 \geq T$.
Respuesta: El modelo es válido para el intervalo $(-\infty, 1200]$ grados Celsius.

Aplicación 3: Aerodinámica Experimental

Contexto: La sustentación de un prototipo de dron es $S(v) = \frac{4v^2}{\sqrt{v-10}}$. Calcule el rango de velocidades v (en m/s) requeridas para que la ecuación de sustentación esté matemáticamente definida.
Solución: La raíz par está en el denominador, por lo que su interior debe ser mayor estricto que cero: $v - 10 > 0 \implies v > 10$.
Respuesta: El dominio operativo requiere velocidades $v \in (10, +\infty)$ m/s.

Aplicación 4: Efectividad Farmacológica

Contexto: La viabilidad celular ante un compuesto químico decrece según la función biológica $C(d) = \frac{100}{|d-40|}$, con d representando la dosis en mg. Identifique la dosis letal que indefine la biomasa celular.
Solución: El denominador de la fracción no puede colapsar a cero: $|d - 40| \neq 0 \implies d \neq 40$.
Respuesta: La dosis que indefine el modelo (dosis de colapso celular) es exactamente 40 mg.

Aplicación 5: Análisis de Circuitos

Contexto: La impedancia reactiva en un circuito resonador se calcula como $Z(w) = \sqrt{w-5} + \frac{1}{20-w}$, con w como la frecuencia. Determine el espectro de frecuencias válidas.
Solución: Raíz: $w - 5 \geq 0 \implies w \geq 5$.
Denominador: $20 - w \neq 0 \implies w \neq 20$.
Respuesta: Frecuencias en el intervalo $[5, 20) \cup (20, +\infty)$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda argumentando desde los principios algebraicos analizados.

1. Al evaluar el dominio de $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, un estudiante concluye que $x \neq -1$ y $x \neq 1$. Argumente rigurosamente por qué el estudiante está equivocado en el conjunto de los reales.

2. Explique lógicamente por qué la función $g(x) = \sqrt[3]{x-8}$ posee un dominio de todos los números reales, mientras que $h(x) = \sqrt[4]{x-8}$ no.

3. Si una función está definida como $f(x) = \frac{\sqrt{-x}}{x+2}$, ¿es posible que el dominio contenga números positivos? Justifique analizando el numerador.

4. Demuestre por qué la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ no es idénticamente igual a la recta $g(x) = x + 2$, enfocándose estrictamente en sus respectivos dominios.

5. Al tener una raíz anidada como $f(x) = \sqrt{\sqrt{x-3}-2}$, el dominio exige dos inecuaciones simultáneas. Descríbalas sin necesariamente resolverlas.

6. Un ingeniero modela un fenómeno físico con $f(t) = \frac{1}{|t|+5}$. Argumente por qué el modelo jamás presentará un error matemático de división por cero.

7. Considere la función $y = \frac{1}{\sqrt{x^2}}$. Explique por qué el dominio de esta función es igual al dominio de $y = \frac{1}{|x|}$.

8. Si el dominio de una función $f(x)$ es $(-\infty, 5]$, ¿qué cambio específico en la ecuación causaría que el dominio cambie a $(-\infty, 5)$ abierto?

9. ¿Bajo qué condiciones específicas el dominio de $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ será exactamente todos los números reales $\mathbb{R}$?

10. Si $f(x) = \sqrt{x-a}$ y $g(x) = \frac{1}{x-b}$, y sabemos que el dominio de $(f+g)(x)$ es $[4, 7) \cup (7, +\infty)$, infiera lógicamente los valores exactos de las constantes a y b.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle el dominio de $f(x) = \frac{5x}{3x-12}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Extraemos el denominador y exigimos que sea __________ de cero.
$3x - 12 \neq$ _____

2. Resolvemos la ecuación:
$3x \neq$ _____ $\implies$ $x \neq$ _____.

3. Conclusión: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\_\_\_\_\_\}$.

Problema 2. Halle el dominio de $g(x) = \sqrt{15 - 5x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Extraemos el radicando y planteamos que sea _______________ a cero.
$15 - 5x \geq$ _____

2. Despejamos con cuidado los signos:
$15 \geq$ _____ $\implies$ _____ $\geq x$.

3. En notación de intervalos: $\mathrm{Dom}(g) = (\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_]$.

Problema 3. Halle el dominio de $h(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+7}}$.

Guía de Solución Interactiva

1. La raíz es par y está en el denominador. Usamos la desigualdad estricta _____.
$x + 7$ _____ 0

2. Resolvemos la inecuación:
x ___________

3. Conclusión: $\mathrm{Dom}(h) = (\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)$.

Problemas Generales

Problema 4. Determine el dominio de $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-16}$.

Problema 5. Determine el dominio de $y = \sqrt{3x-18}$.

Problema 6. Determine el dominio de $h(x) = \frac{x^2}{x^2+5x+6}$.

Problema 7. Halle el dominio de $f(x) = \sqrt{8-2x} + \frac{1}{x}$.

Problema 8. Halle el dominio de $g(x) = \frac{x-4}{|x-3|-2}$.

Problema 9. Determine el dominio de $m(x) = \frac{5}{\sqrt{10-2x}}$.

Problema 10. Determine el dominio de $y = \sqrt[6]{x^2-25}$.

Problema 11. Halle el dominio de $f(x) = \frac{1}{x^2-x} + \sqrt{x+2}$.

Problema 12. Halle el dominio de $p(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x-1}}$.

Problema 13. Halle el dominio de $q(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

Problema 14. Determine el dominio de $r(x) = \sqrt[4]{\frac{x-2}{x+3}}$.

Problema 15. Determine el dominio de $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|-4}}$.

Problema 16. Halle el dominio de $g(x) = \sqrt{1 - \sqrt{x-2}}$.

Problema 17. Halle el dominio de $y = \frac{x-1}{x^3-4x}$.

Problema 18. Halle el dominio de $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-1}$.

Problema 19. Determine el dominio de $h(x) = \frac{1}{|x^2-1|-3}$.

Problema 20. Halle el dominio de $m(x) = \sqrt{\frac{x^2-9}{x^2-16}}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un radar meteorológico modela el decaimiento de una tormenta mediante $T(h) = \frac{500}{h^2-36}$, con h como la altura atmosférica. Encuentre el nivel donde la lectura del radar es matemáticamente nula.

Guía de Solución Interactiva

1. El modelo colapsa si el denominador es cero: $h^2 - 36$_____0. 2. Factorizamos o despejamos: $(h -$ _____$)(h +$ _____$) = 0$. 3. Asumiendo altura positiva, el sistema falla en $h =$ _____ metros.

Problema 2. La intensidad luminosa proyectada por una fuente láser se calcula con $I(d) = \sqrt{200 - 8d}$. ¿Cuál es el rango de distancias d permitidas para que la fórmula arroje un valor real?

Guía de Solución Interactiva

1. El radicando debe ser positivo o cero: $200 - 8d$_____0. 2. Despejamos: 200_____$8d \implies$ _____ $\geq d$. 3. El dominio de distancia operativa es $(-\infty,$ _____$]$.

Problema 3. Una torre de enfriamiento libera presión según $P(v) = \frac{10}{\sqrt{v-15}}$. Halle los volúmenes de vapor v para los cuales la válvula de seguridad está definida.

Guía de Solución Interactiva

1. Raíz par en el denominador implica interior estricto: $v - 15$_____0. 2. Despejamos el volumen: v__________. 3. El dominio de diseño es (_____, _____).

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Un criptosistema cuida las contraseñas generando una dispersión Hash dependiente de la función $K(x) = \frac{x^2}{|x|-8}$. Indique las claves numéricas que harían colapsar la seguridad del algoritmo de encriptación.

Problema 5. La permeabilidad magnética de un nuevo superconductor a bajas temperaturas se comporta como $\mu(T) = \sqrt{T^2 - 49}$. Determine el rango térmico válido para estudiar el material en laboratorio.

Problema 6. La propagación de una onda acústica submarina es $A(p) = \frac{3p+2}{p^2-8p+15}$. Halle los gradientes de presión p críticos donde el sonido dejaría de transmitirse teóricamente.

Problema 7. Una bióloga modela el crecimiento parasitario con la fórmula $P(t) = \frac{100t}{\sqrt{50-2t}}$. Determine el intervalo de tiempo matemáticamente seguro para monitorear el cultivo.

Problema 8. En óptica, el índice de refracción variable de un cristal sintético sigue $n(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)-1}$. ¿Qué ángulo de incidencia indefine la refracción del rayo de luz?

Problema 9. El costo marginal de ensamblaje robótico decrece siguiendo la función $C(q) = \sqrt{1000 - q^3}$. Encuentre la cantidad máxima de unidades que mantiene la lógica de fabricación real.

Problema 10. Un simulador bursátil estima los dividendos futuros usando $D(x) = \frac{\sqrt{x-20}}{x-50}$. Calcule el dominio de capitales que pueden insertarse sin arrojar un error de sintaxis en el software.

Problema 11. En nanotecnología, la fuerza repulsiva entre partículas depende de $F(d) = \sqrt[4]{1 - d^2}$. Determine las separaciones intermoleculares operativas que el microscopio puede leer.

Problema 12. El caudal en una red de tuberías de alta presión está dictado por $Q(r) = \frac{1}{|r^2-4|}$. Identifique los grosores de radio que provocarían un estallido teórico en el sistema.

Problema 13. La absorción de nitrógeno en un buzo obedece a $N(p) = \frac{\sqrt{p+5}}{\sqrt{10-p}}$. Determine las atmósferas de presión válidas para una inmersión documentada.

Problema 14. Un motor iónico espacial regula el flujo de xenón mediante la fórmula $f(E) = \sqrt{\frac{E-4}{E-12}}$. Halle la energía eléctrica necesaria para que la propulsión funcione sin fallos.

Problema 15. En topografía, la pendiente de una montaña se cartografía usando $S(x) = \frac{1}{\sqrt[6]{x^2-x-20}}$. Determine los linderos donde el terreno es evaluable por los topógrafos.

Problema 16. La deflexión de una viga de acero sometida a estrés extremo se comporta como $\delta(F) = \sqrt{10-\sqrt{F}}$. Halle la tolerancia máxima de carga transversal antes del colapso inelástico.

Problema 17. Un satélite de órbita baja experimenta fricción según $D(v) = \frac{1}{v^4-16}$. Calcule las velocidades específicas que desorientarían los giroscopios por inconsistencia matemática.

Problema 18. La cinética de una reacción enzimática se estudia bajo la tasa $V(s) = \frac{\sqrt{s}}{s^2-100}$. Halle la concentración de sustrato válida para que la catalización ocurra en el laboratorio.

Problema 19. En diseño urbano, el flujo vehicular de un trébol de autopistas es $T(c) = \log(c-30) + \frac{1}{c-60}$. Calcule la cantidad de coches que valida el modelo predictivo de tráfico.

Problema 20. La vida útil residual de una red de telecomunicaciones submarinas se modela con $L(y) = \sqrt{\frac{y^2-81}{y^2-144}}$. Encuentre los años proyectados que sostienen el análisis de fibra óptica.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$
2. $(-\infty, 3]$
3. $(-7, +\infty)$
4. $\mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$
5. $[6, +\infty)$
6. $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2\}$
7. $(-\infty, 0) \cup (0, 4]$
8. $\mathbb{R} \setminus \{1, 5\}$
9. $(-\infty, 5)$
10. $(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$
11. $[-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$
12. $(1, 5]$
13. $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$
14. $(-\infty, -3) \cup [2, +\infty)$
15. $(-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$
16. $[2, 3]$
17. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$
18. $[-3, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, 3]$
19. $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$
20. $(-\infty, -4) \cup [-3, 3] \cup (4, +\infty)$

Propuestos de Aplicación

1. $h = 6$ (y $h = -6$, pero altura es positiva).
2. Distancias en $(-\infty, 25]$.
3. $v > 15$ o en intervalo $(15, +\infty)$.
4. Fallan en $x = 8$ y $x = -8$.
5. Temperaturas $(-\infty, -7] \cup [7, +\infty)$.
6. En presiones críticas $p = 3$ y $p = 5$.
7. Tiempos en $[0, 25)$.
8. Invalida cuando $\theta = 0$ (o múltiplos pares de π).
9. Cantidad máxima $q = 10$.
10. Dominio bursátil $[20, 50) \cup (50, +\infty)$.
11. Separaciones en $[-1, 1]$.
12. Radios de rotura en $r = 2$ (y $r = -2$).
13. Presiones permitidas $[-5, 10)$.
14. Energías en $(-\infty, 4] \cup (12, +\infty)$.
15. Terrenos en $(-\infty, -4) \cup (5, +\infty)$.
16. Tolerancia carga $F \in [0, 100]$.
17. En velocidades de $v = 2$ (y $v = -2$).
18. Concentración en $[0, 10) \cup (10, +\infty)$.
19. Flujos en $(30, 60) \cup (60, +\infty)$.
20. Años en $(-\infty, -12) \cup [-9, 9] \cup (12, +\infty)$.

$\mathbb{R} \setminus \{\dots\}$

¡Llegaste al Final!

'Conocer las restricciones matemáticas te prepara para las fronteras físicas. No es lo que la función hace, es dónde tiene permitido existir.'

- El arte del análisis real

¡Felicidades! Ahora tienes el poder analítico para blindar cualquier función, asegurándote que nunca se enfrente a una división imposible ni a una raíz irreal.

∞

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com