PRECÁLCULO

DESIGUALDADES NO LINEALES

CUADERNO DE TRABAJO

Método de los Puntos Críticos

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Método de Puntos Críticos

Cuando nos enfrentamos a inecuaciones cuadráticas (grado 2), polinómicas de grado mayor o racionales (con variables en el denominador), ya no podemos simplemente "despejar la x". ¡Si pasamos una variable multiplicando, podríamos alterar el sentido de la desigualdad sin saberlo! La solución definitiva es el **Método de los Puntos Críticos** (también llamado curva de signos o çementerio").

1. Preparación de la Inecuación

Paso de oro: Todo debe estar a un lado de la desigualdad, comparado con cero (ej. $P(x) > 0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$). Si hay fracciones, reste y obtenga un **denominador común**. Nunca multiplique en aspa si hay variables involucradas.

PROFE TEO

¡Alerta roja! Si tienes $\frac{2}{x} < 1$, ¡NO pases la x multiplicando! Te quedará $2 < x$, lo cual está pésimo. Pasa el 1 restando: $\frac{2}{x} - 1 < 0$.

2. Los Puntos Críticos

1. **Factorización máxima:** Factorice el numerador y el denominador completamente (aspa simple, factor común, diferencia de cuadrados).
2. **Raíces:** Iguale cada factor a cero para hallar los **puntos críticos**.
3. **Análisis de Bolitas (Abiertas/Cerradas):**
   - Si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$: Los puntos del *numerador* van cerrados ($\bullet$).
   - Si la desigualdad es $<$ o $>$: Todos los puntos van abiertos ($\circ$).
   - **¡Regla sagrada!** Los puntos del *denominador* **SIEMPRE van abiertos** ($\circ$), sin importar el símbolo, porque no se puede dividir entre cero.

PROFE TEO

Para evitar líos, asegúrense siempre que su x mayor sea positiva. Si tienen $(3 - x)(x + 1) > 0$, multipliquen por -1 para que quede $(x - 3)(x + 1) < 0$.

3. La Curva de Signos (El Çementerio")

Dibuje una recta numérica y coloque los puntos críticos ordenados.

- **Signos:** Comience desde el extremo derecho. Si todos los coeficientes principales de las x son positivos, coloque un signo $(+)$.
- **Alternancia:** Al cruzar cada punto crítico hacia la izquierda, alterne el signo $(+, -, +, - \ldots)$.
- **Rebote (Multiplicidad par):** Si un factor está elevado a una potencia par (ej. $(x - 2)^2$), el signo **NO alterna** al cruzar ese punto crítico.
- **Selección:** Sombreé las zonas $(+)$ si la inecuación final es > 0 o ≥ 0. Sombreé las zonas $(-)$ si es < 0 o ≤ 0.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Cuadrática Simple

Enunciado: Resuelva $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.
Solución: Factorizamos por aspa simple: $(x-3)(x-2) \leq 0$.
Puntos críticos (P.C.): $x = 3, x = 2$. Ambos cerrados ($\bullet$) por el $\leq$.
Dibujamos y alternamos signos de derecha a izquierda: $+ \quad - \quad +$
Como es ≤ 0, tomamos la zona negativa $(-)$.
C.S. $= [2, 3]$.

Problema Resuelto 2: Inecuación Racional Básica

Enunciado: Resuelva $\frac{x-4}{x+1} > 0$.
Solución: P.C. Numerador: $x = 4$. P.C. Denominador: $x = -1$.
Como es $>$, ambos son abiertos ($\circ$).
Recta numérica: signos $+ \quad - \quad +$ en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 4)$, $(4, \infty)$.
Como es > 0, tomamos las zonas positivas $(+)$.
C.S. $= (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$.

Problema Resuelto 3: Restricción Letal (Denominador)

Enunciado: Resuelva $\frac{2x-10}{x-3} \leq 0$.
Solución: P.C. Numerador: $x = 5$ (Cerrado $\bullet$ por el $\leq$).
P.C. Denominador: $x = 3$ (**¡Siempre abierto!** $\circ$).
Recta: $+ \quad - \quad +$. Zonas delimitadas por 3 y 5.
Como es ≤ 0, tomamos la zona negativa.
C.S. $= (3, 5]$.

Problema Resuelto 4: Cuidado con la x negativa

Enunciado: Resuelva $8 - 2x - x^2 > 0$.
Solución: Multiplicamos todo por -1 y volteamos el signo: $x^2 + 2x - 8 < 0$.
Factorizamos: $(x+4)(x-2) < 0$.
P.C.: $x = -4, x = 2$. (Abiertos $\circ$).
Tomamos la zona negativa $(-)$ porque cambiamos a < 0.
C.S. $= (-4, 2)$.

PROFE TEO
Fíjense muy bien en el Problema 3. El corchete en el 5 es correcto, pero si le ponían corchete al 3, ¡anulaban todo el ejercicio! Cero abajo es destrucción matemática.

Problema Resuelto 5: Puntos de Rebote (Multiplicidad Par)

Enunciado: Resuelva $\frac{(x-1)^2(x+2)}{x-5} \geq 0$.
Solución: P.C.: $x = 1$ (rebote, cerrado), $x = -2$ (cerrado), $x = 5$ (abierto).
Colocamos signos desde la derecha (infinito):
Zonas: $(5, \infty) \to (+)$
$(1, 5) \to (-)$ (cambia al cruzar 5)
$(-2, 1) \to (-)$ (**NO cambia** al cruzar 1 por ser potencia cuadrada)
$(-\infty, -2) \to (+)$ (cambia al cruzar -2).
Tomamos zonas $(+)$. Pero ojo, $x = 1$ está en zona $(-)$ pero hace la inecuación $0 \geq 0$ (cumple).
C.S. $= (-\infty, -2] \cup \{1\} \cup (5, \infty)$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Altura de un Proyectil

Contexto: Un cohete de prueba tiene una altura modelada por $h(t) = -5t^2 + 20t$ (metros). Determine durante qué intervalo de tiempo el cohete estará estrictamente por encima de los 15 metros.
Solución: $-5t^2 + 20t > 15 \implies 5t^2 - 20t + 15 < 0$.
Dividimos entre 5: $t^2 - 4t + 3 < 0$.
Factorizamos: $(t-3)(t-1) < 0$.
P.C.: $t = 1, t = 3$. Zona negativa: entre 1 y 3.
Rpta: Entre el segundo 1 y el segundo 3.

Aplicación 2: Biología de Poblaciones

Contexto: La biomasa de una plaga (en miles) en un cultivo cerrado responde a $P(t) = \frac{10t}{t^2+1}$. Halle el periodo de meses $t > 0$ donde la plaga desciende a menos de 3 mil especímenes.
Solución: $\frac{10t}{t^2+1} < 3$. Como $t^2 + 1$ es siempre positivo, podemos multiplicar:
$10t < 3t^2 + 3 \implies 3t^2 - 10t + 3 > 0$.
$(3t-1)(t-3) > 0$. Zonas $(+)$: $t < 1/3 \vee t > 3$.
Rpta: En el primer tercio del mes y después del mes 3.

Aplicación 3: Economía y Utilidades

Contexto: Una planta de ensamblaje genera ganancias diarias $U(x) = -x^2 + 50x - 400$ dólares, donde x son las unidades ensambladas. Calcule el rango de producción para no tener pérdidas ($U \geq 0$).
Solución: $-x^2 + 50x - 400 \geq 0 \implies x^2 - 50x + 400 \leq 0$.
$(x-40)(x-10) \leq 0$.
P.C.: $10, 40$. Tomamos la zona $(-)$ por el $\leq$.
Rpta: Se deben producir entre 10 y 40 unidades inclusive.

Aplicación 4: Control de Medicamentos

Contexto: La concentración en sangre de un fármaco (mg/L) se ajusta al modelo $C(t) = \frac{2t}{t^2+4}$. Calcule el lapso en horas $t \geq 0$ donde la concentración es eficaz, es decir, mayor o igual a 0,4 mg/L.
Solución: $\frac{2t}{t^2+4} \geq \frac{2}{5} \implies 10t \geq 2t^2 + 8$.
$2t^2 - 10t + 8 \leq 0 \implies t^2 - 5t + 4 \leq 0$.
$(t-4)(t-1) \leq 0$. P.C.: $1, 4$. Zona $(-)$.
Rpta: Desde la hora 1 hasta la hora 4.

PROFE TEO
La economía real usa puras cuadráticas. Producir muy poco da pérdidas, pero producir en exceso satura la fábrica y también da pérdidas. ¡El equilibrio es un intervalo!

Aplicación 5: Diseño Arquitectónico

Contexto: Un corral rectangular se amplía dejando que su largo exceda a su ancho x en 5 metros. Si el reglamento exige que el área útil sea al menos de 36 m^2, determine las medidas del ancho permitidas.
Solución: $x(x+5) \geq 36 \implies x^2 + 5x - 36 \geq 0$.
$(x+9)(x-4) \geq 0$.
P.C.: $-9, 4$. Zonas (+): $x \leq -9$ o $x \geq 4$.
Descartando x negativo (es una distancia física), $x \geq 4$.
Rpta: El ancho debe ser igual o mayor a 4 metros.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda con justificaciones algebraicas y conceptuales breves.

1. Si en $\frac{x+2}{x-3} > 0$ multiplicamos en aspa y decimos que $x+2>0 \implies x>-2$, ¿qué error letal hemos cometido y qué soluciones hemos perdido o agregado?
2. El coeficiente principal de la inecuación $-2x^2+8x-5>0$ es negativo. ¿Por qué el método del cementerio exige que lo multipliquemos por -1 antes de colocar los signos de derecha a izquierda?
3. Si evaluamos el factor $(x-4)^2$ en una inecuación, ¿por qué produce un rebote.en el que el signo de la curva no se alterna al cruzar el punto $x=4$?
4. Analice la expresión $x^2+9>0$. ¿Es necesario aplicar puntos críticos o se puede deducir la solución en $\mathbb{R}$ inmediatamente?
5. Al tener una raíz de multiplicidad impar (como un factor elevado al cubo), ¿el signo de la recta numérica alterna o rebota? Justifique su respuesta.
6. ¿Por qué la inecuación cuadrática $(x-2)^2 \leq 0$ tiene solución única, a pesar de usar el símbolo de desigualdad?
7. Si una fracción racional $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ tiene la misma raíz en el numerador y en el denominador (ej. factor $(x-1)$ en ambos), ¿qué consideración especial debe tenerse en el punto $x=1$?
8. Explique físicamente por qué una función racional como la concentración de un medicamento ($C(t)=\frac{t}{t^2+1}$) a la larga siempre tiende a niveles de no eficacia.
9. Un estudiante dice: "Para resolver $x^3>4x$, puedo dividir entre x y queda $x^2>4$". ¿Qué porción del conjunto solución ha omitido por esta mala praxis?
10. Si la recta numérica queda con signos $(-)$ en todo su dominio (salvo puntos críticos de rebote) para una inecuación pedida como >0, ¿cuál es el C.S.?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Cuadrática estándar: Resuelva $x^2 - 7x + 10 \leq 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. Factoriza por aspa simple:
$(x - \_\_\_\_)(x - \_\_\_\_) \leq 0$

2. Halla los Puntos Críticos (ambos cerrados por el $\leq$):
$x_1 = \_\_\_\_$, $x_2 = \_\_\_\_$

3. Grafica en tu mente. Alterna signos $+, -, +$. Como es ≤ 0, tomas la zona ________.
C.S. $= [\_\_\_\_, \_\_\_\_]$

Problema 2. Racional básica: Resuelva $\frac{x-5}{x+1} > 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica los Puntos Críticos y su estado:
Num: $x = \_\_\_\_$ (abierto). Den: $x = \_\_\_\_$ (abierto).

2. Coloca en la recta y alterna signos: $+, -, +$.

3. Como es > 0, toma los intervalos con signo ________.
C.S. $= (-\infty, \_\_\_\_) \cup (\_\_\_\_, \infty)$

Problema 3. Factorización por factor común: Resuelva $x^3 - 4x \geq 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. Extrae x y luego aplica diferencia de cuadrados:
$x(x^2 - 4) \geq 0 \implies x(x - \_\_\_\_)(x + \_\_\_\_) \geq 0$

2. Tienes tres P.C. (todos cerrados):
$x_1 = \_\_\_\_$, $x_2 = \_\_\_\_$, $x_3 = \_\_\_\_$

3. Intercala signos y toma las zonas positivas:
C.S. $= [\_\_\_\_, \_\_\_\_] \cup [\_\_\_\_, \infty)$

Problemas Generales (Nivel Medio a Avanzado)

Problema 4. Resuelva: $x^2 + 6x + 8 < 0$.

Problema 5. Factorice y resuelva: $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$.

Problema 6. Corrija el signo: $-x^2 + 4x + 12 > 0$.

Problema 7. Racional simple: $\frac{x+3}{x-2} \leq 0$.

Problema 8. Doble variable racional: $\frac{2x-4}{3x+9} > 0$.

Problema 9. Restricciones combinadas: $\frac{x}{x-4} \leq 1$. (Aviso: No cruce la x).

Problema 10. Operación racional previa: $\frac{2}{x+1} \geq 3$.

Problema 11. Trinomio cuadrado perfecto: $x^2 - 10x + 25 \leq 0$.

PROFE TEO

En el problema 3 hay tres puntos críticos, ¡así que la curva atraviesa la recta tres veces! Empiecen con + en el infinito derecho.

Problema 12. Raíces múltiples (grado 3): $(x-1)(x+2)(x-4) < 0$.

Problema 13. Polinomio cuadrático sin raíces reales: $x^2 + x + 1 > 0$.

Problema 14. Rebote par: $(x-3)^2(x+5) \geq 0$.

Problema 15. Racional con rebote: $\frac{(x+1)^2}{x-2} \leq 0$.

Problema 16. Diferencia racional: $\frac{x}{x+2} - \frac{1}{x-1} \geq 0$.

Problema 17. Potencias pares e impares: $\frac{(x-2)^3(x+4)^2}{(x-5)^4} < 0$.

Problema 18. Doble inecuación racional: $-1 < \frac{x-1}{x+2} \leq 2$.

Problema 19. Cúbica racionalizada: $\frac{x^3-8}{x^2-x} \geq 0$. (Factorice suma/diferencia de cubos).

Problema 20. Sistema de inecuaciones: Resuelva $x^2 - 4 > 0$ y $x^2 - 3x - 10 \leq 0$ e intersecte.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Una fábrica de cerámica modela sus ganancias en miles con $G(x) = -2x^2 + 16x - 24$. Halle las cantidades x (en miles) para mantener rentabilidad neta positiva ($G > 0$).

Guía de Solución Interactiva

1. Divide entre -2 (invierte signo): $x^2 - 8x + 12\_\_\_0$ 2. Puntos críticos de $(x - \_\_\_)(x - \_\_\_) < 0$: $x_1 = \_\_\_$, $x_2 = \_\_\_$. 3. Producción rentable: $x \in (\_\_\_, \_\_\_)$.

Problema 2. Un laboratorio de virología estima que la fracción infectada de una colonia sigue $F(t) = \frac{4t}{t^2+4}$. Calcule las horas $t \geq 0$ donde la infección supera el umbral del 50 % ($F \geq 0{,}5$).

Guía de Solución Interactiva

1. Fracción límite: $\frac{4t}{t^2+4} \geq \frac{1}{2} \implies 8t \geq t^2 + 4$. 2. Forma la cuadrática: $t^2 - \_\_\_\_\_t + \_\_\_\_\_ \leq 0$. 3. Factoriza y halla el rango: $t \in [\_\_\_, \_\_\_]$ horas.

Problema 3. Un invernadero detecta plagas si la humedad h es crítica, dada por $\frac{h-60}{h-40} \leq 0$. Determine los niveles de humedad que desatan el protocolo fitosanitario.

Guía de Solución Interactiva

1. P.C. del Numerador: $h = \_\_\_\_\_$ (Cerrado). 2. P.C. del Denominador: $h = \_\_\_\_\_$ (Abierto, NUNCA cero). 3. Zona negativa en el cementerio: Humedad en $(\_\_\_, \_\_\_]$ %.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La tensión térmica de un puente colgante $T(x) = x^2 - 12x + 20$ en kN/m causa fisuras si $T < 0$. Determine las temperaturas ambientales x que provocan daño estructural inminente.

Problema 5. Un lente de telescopio óptico deforma la luz si el punto focal d obedece a $\frac{d-50}{d+10} \geq 0$. Halle las distancias operativas donde el lente no se deforma, sabiendo $d > 0$.

Problema 6. La tasa de una reacción química exuda gas letal si $V(x) = -x^2 + 10x - 9 \geq 0$. Encuentre el rango de concentración catalítica x donde hay peligro.

Problema 7. Un dron agrario pierde eficiencia si el rendimiento de su batería responde al modelo $\frac{20}{x-2} \leq 4$, siendo x horas de vuelo. Halle el tiempo útil seguro asumiendo arranque $x = 0$.

Problema 8. El flujo de carga de un centro de servidores sufre latencia si la proporción $R = \frac{x^2-9}{x} \leq 0$. Determine el tráfico x positivo que estabiliza el servidor $(R > 0)$.

Problema 9. En agronomía, el rendimiento de maíz crece con fertilizante f según $-f^2 + 14f - 24 > 0$. Identifique las dosis efectivas que evitan quemar la raíz ni quedar en déficit.

Problema 10. La órbita de un satélite sufre fricción atmosférica si su altitud r (cientos de km) satisface $\frac{r-4}{r-8} \geq 2$. Calcule las órbitas críticas para programar evasiones.

Problema 11. Un factor epidemiológico de contagio social cae a fase endémica cuando el índice $\frac{x^2-x-6}{x+1} \leq 0$. Identifique los ratios $x \geq 0$ de bajo riesgo.

Problema 12. La presión de un caldero termodinámico obedece a $P(v) = v^3 - 16v \geq 0$. Sabiendo que el volumen v es físicamente positivo, acote el volumen bajo presión.

Problema 13. Un freno magnético de ascensor calienta los discos. El calor excede los límites si $H(t) = \frac{t^2-5t+6}{t} < 0$. Sabiendo $t > 0$, halle el tiempo crítico.

Problema 14. La amplitud de onda sísmica A decae modelada por $\frac{A+3}{A-2} \leq 1$. Demuestre qué valores de amplitud hacen que el sismo pierda energía destructiva.

Problema 15. Una turbina eólica produce excedente si la potencia generada cumple $v^2 - 15v + 50 > 0$. Acote las velocidades v del viento que requieren almacenamiento extra.

Problema 16. El desagüe de un pozo minero se satura si el nivel h cumple $\frac{2h^2-8}{h-3} \geq 0$. Señale las cotas que exigen activar motobombas auxiliares.

Problema 17. Un láser médico ablaciona tejido óptimamente si su foco f cumple $(f-2)^2(f-6) \leq 0$. Interprete y determine la distancia máxima de corte seguro.

Problema 18. La volatilidad del mercado predice una caída en bolsa cuando $\frac{(x-4)^3}{x+1} < 0$. Determine las tasas de retorno x que advierten peligro inminente.

Problema 19. Un actuador robótico falla por vibración armónica si $V = x^4 - 13x^2 + 36 < 0$. Halle el margen frecuencial $x > 0$ que mantiene el brazo estable.

Problema 20. La profundidad operativa de un submarino autónomo z es segura si $\frac{z}{z-1} - \frac{2}{z+1} \geq 1$. Halle los metros que evitan el colapso presurizado en la nave.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $[2, 5]$
2. $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$
3. $[-2, 0] \cup [2, \infty)$
4. $(-4, -2)$
5. $(-\infty, -1/2] \cup [3, \infty)$
6. $(-2, 6)$
7. $[-3, 2)$
8. $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$
9. $(-\infty, 4)$
10. $[-1/3, 1)$
11. $x = 5$ (Única solución)
12. $(-\infty, -2) \cup (1, 4)$
13. $\mathbb{R}$ (Todo el conjunto real)
14. $[-5, \infty)$
15. $(-\infty, 2) \cup \{-1\}$ (Rebote en -1)
16. $[-1, 1) \cup [2, \infty)$
17. $(-\infty, -4) \cup (-4, 2)$
18. $(-1/2, \infty)$ (Considerando ambas ramas)
19. $(-1, 0) \cup [2, \infty)$
20. $[-2, 2] \cup [2, 5]$ intersecta: solo $[-2, -2) \cup (2, 5]$. Realmente $(2, 5]$.

Propuestos de Aplicación

1. $(2, 6)$ miles.
2. $[4-2\sqrt{3}, 4+2\sqrt{3}]$ ó aproximado horas. *Corrección*: $t^2-8t+4 \leq 0 \implies t \in [0{,}54, 7{,}46]$.
3. $(40, 60]$ por ciento.
4. $(2, 10)$ grados.
5. $d \in [50, \infty)$ mm.
6. $[1, 9]$
7. $[0, 2) \cup [7, \infty)$ horas.
8. $x > 3$
9. $(2, 12)$ unidades/dosis.
10. $[8, 12]$ cientos de km.
11. $[0, 3]$ (Ratio endémico).
12. $v \geq 4$
13. $(2, 3)$ segundos.
14. $A < 2$ (Asume A negativo descartable, o pierde rango válido).
15. $v < 5$ ó $v > 10$.
16. $[-2, 3) \cup [2, \infty)$. Como $h > 0$: $[2, 3) \cup [2, \infty)$.
17. Distancia $f \leq 6$ (Corte continuo).
18. $(-1, 4)$
19. Frecuencias no fallidas: $(0, 2] \cup [3, \infty)$.
20. $\frac{z^2+z-2z+2-z^2+1}{z^2-1} \geq 0 \implies \frac{-z+3}{z^2-1} \geq 0 \implies (-\infty, -1) \cup (1, 3]$.

¡Misión Cumplida!

'Aprender el método de los puntos críticos te enseña que no hay situaciones eternamente malas. Todo cambia de signo al cruzar el punto adecuado.'

- Tu futuro imbatible

¡Felicidades por llegar hasta el final! Ahora tienes la herramienta suprema para dominar cualquier inecuación polinómica o racional.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com