

$ax + b < c$

PRECÁLCULO

**DESIGUALDADES
LINEALES**

$x \leq b$

CUADERNO DE TRABAJO
Intervalos, Resolución y Recta Real

Prof. Teófilo Teves

$x \in [a, \infty)$

www.teoteves.com

Teoría: Desigualdades Lineales

Resolver una desigualdad es como resolver una ecuación, pero en lugar de buscar un único punto de equilibrio, buscamos un **rango de valores** que hagan cierta la afirmación. Estos rangos se expresan como **intervalos** y se grafican en la recta real.

1. Notación de Intervalos y Recta Real

- **Abierto** (a, b) : No incluye los extremos. Símbolos: $<, >$. En la recta se usa una bolita en blanco \circ .
- **Cerrado** $[a, b]$: Incluye los extremos. Símbolos: \leq, \geq . En la recta se usa una bolita pintada \bullet .
- **Infinito** (a, ∞) o $(-\infty, b]$: No tiene límite en un lado. El infinito **siempre** lleva paréntesis abierto.

$$\leftarrow \circ \text{---} \circ \rightarrow x \in (-2, 2)$$

$$\leftarrow \bullet \text{---} \rightarrow x \in [0, \infty)$$

2. Propiedades Clave de las Desigualdades

1. **Adición/Sustracción**: Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$. (Sumar o restar no altera el sentido).
2. **Multiplicación (Positivo)**: Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
3. **Multiplicación (Negativo)**: Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$. **¡Se invierte el símbolo!**

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Desigualdad Simple

Enunciado: Resuelva $5x - 3 < 12$.

Solución: Sumamos 3 a ambos lados: $5x < 15$.

Dividimos entre 5 (es positivo, no cambia el signo): $x < 3$.

C.S. = $(-\infty, 3)$.

.... ▷

COMENTARIO

¡Aviso! Un error clásico es olvidar voltear el signo de la desigualdad cuando dividen entre un negativo. Es la regla de oro que salva exámenes.

.... ▷

COMENTARIO

Las inecuaciones compuestas (tipo $A < B \leq C$) se pueden resolver separando en dos inecuaciones y cruzando las respuestas, o despejando la x desde el medio hacia ambos lados.

Problema Resuelto 2: Inversión del Símbolo**Enunciado:** Resuelva $4 - 2x \geq 10$.**Solución:** Restamos 4: $-2x \geq 6$.Dividimos entre -2 . **Alerta:** Invertimos el símbolo.

$$x \leq -3.$$

$$\text{C.S.} = (-\infty, -3].$$

Problema Resuelto 3: Fracciones Lineales**Enunciado:** Resuelva $\frac{2x-1}{3} + 1 > \frac{x+2}{2}$.**Solución:** Multiplicamos toda la inecuación por el MCM que es 6:

$$2(2x - 1) + 6 > 3(x + 2).$$

$$4x - 2 + 6 > 3x + 6 \implies 4x + 4 > 3x + 6.$$

Restamos $3x$ y 4 : $x > 2$.

$$\text{C.S.} = (2, \infty).$$

Problema Resuelto 4: Desigualdad Compuesta (Doble)**Enunciado:** Resuelva $-5 \leq 3x + 1 < 10$.**Solución:** El objetivo es dejar la x sola en el centro.Restamos 1 a los tres miembros: $-6 \leq 3x < 9$.Dividimos entre 3 a todos: $-2 \leq x < 3$.

$$\text{C.S.} = [-2, 3).$$

Problema Resuelto 5: Variables en Todos los Lados**Enunciado:** Resuelva $2x - 4 < 5x + 2 \leq x + 14$.**Solución:** Separamos en dos desigualdades simultáneas:

1) $2x - 4 < 5x + 2 \implies -6 < 3x \implies -2 < x$ (es decir, $x > -2$).

2) $5x + 2 \leq x + 14 \implies 4x \leq 12 \implies x \leq 3$.

Intersectamos ambas condiciones: $x \in (-2, \infty) \cap (-\infty, 3]$.

$$\text{C.S.} = (-2, 3].$$

.....▷

COMENTARIO

Multiplicar todo por el MCM es el mejor atajo para destruir las fracciones en el primer paso y trabajar solo con números enteros.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Economía Digital

Contexto: En *misdulcecitos.com*, fabricar un pastel temático cuesta \$15. Los gastos fijos del hosting son \$50 semanales. Si el pastel se vende a \$25, ¿cuántos pasteles x deben venderse para obtener ganancias de al menos \$100?

Solución: Ingresos - Costos ≥ 100 .

$$25x - (15x + 50) \geq 100 \implies 10x - 50 \geq 100.$$

$$10x \geq 150 \implies x \geq 15.$$

Se deben vender 15 pasteles o más.

Aplicación 2: Telecomunicaciones

Contexto: Un servidor XenForo procesa datos. Su temperatura T sube por sobrecarga según $T = 30 + 0,5u$ (en °C), donde u son los usuarios conectados. Para evitar colapso, T debe ser estrictamente menor a 85°C. Halle u .

Solución: $30 + 0,5u < 85$.

$$0,5u < 55 \implies \frac{1}{2}u < 55 \implies u < 110.$$

El servidor tolera un máximo estricto de 109 usuarios.

Aplicación 3: Logística Universitaria

Contexto: Un dron del IMCA UNI viaja a Abancay. La altitud h en su ruta está dada por $h(t) = 150 - 5t$. Debe mantener una altura entre 50 y 100 metros. Determine el intervalo de tiempo t .

Solución: $50 \leq 150 - 5t \leq 100$. Restamos 150:

$$-100 \leq -5t \leq -50. \text{ Dividimos entre } -5 \text{ (volteamos símbolos):}$$

$$20 \geq t \geq 10 \implies t \in [10, 20] \text{ segundos.}$$

Aplicación 4: Finanzas Personales

Contexto: Usando Yape, un estudiante tiene un tope mensual de gastos de S/ 500. Si paga una suscripción de S/ 40 y gasta S/ 15 diarios en almuerzo, ¿cuántos días d puede costear sin exceder el límite?

Solución: $15d + 40 \leq 500$.

$$15d \leq 460 \implies d \leq 30,66.$$

Dado que los días deben ser enteros, el límite es de 30 días máximo.

....>

COMENTARIO

¡Excelente ejemplo el del dron! Al dividir entre -5, el 20 queda a la izquierda y el 10 a la derecha, por eso se reescribe de menor a mayor como $[10, 20]$.

Aplicación 5: Calibración Óptica

Contexto: Un láser oftalmológico tiene una intensidad $I = \frac{4x-10}{3}$ mW. Para ser seguro, I debe superar los 2 mW pero no sobrepasar los 6 mW. Evalúe el parámetro de potencia x .

Solución: $2 < \frac{4x-10}{3} \leq 6$. Multiplicamos por 3:

$6 < 4x - 10 \leq 18$. Sumamos 10:

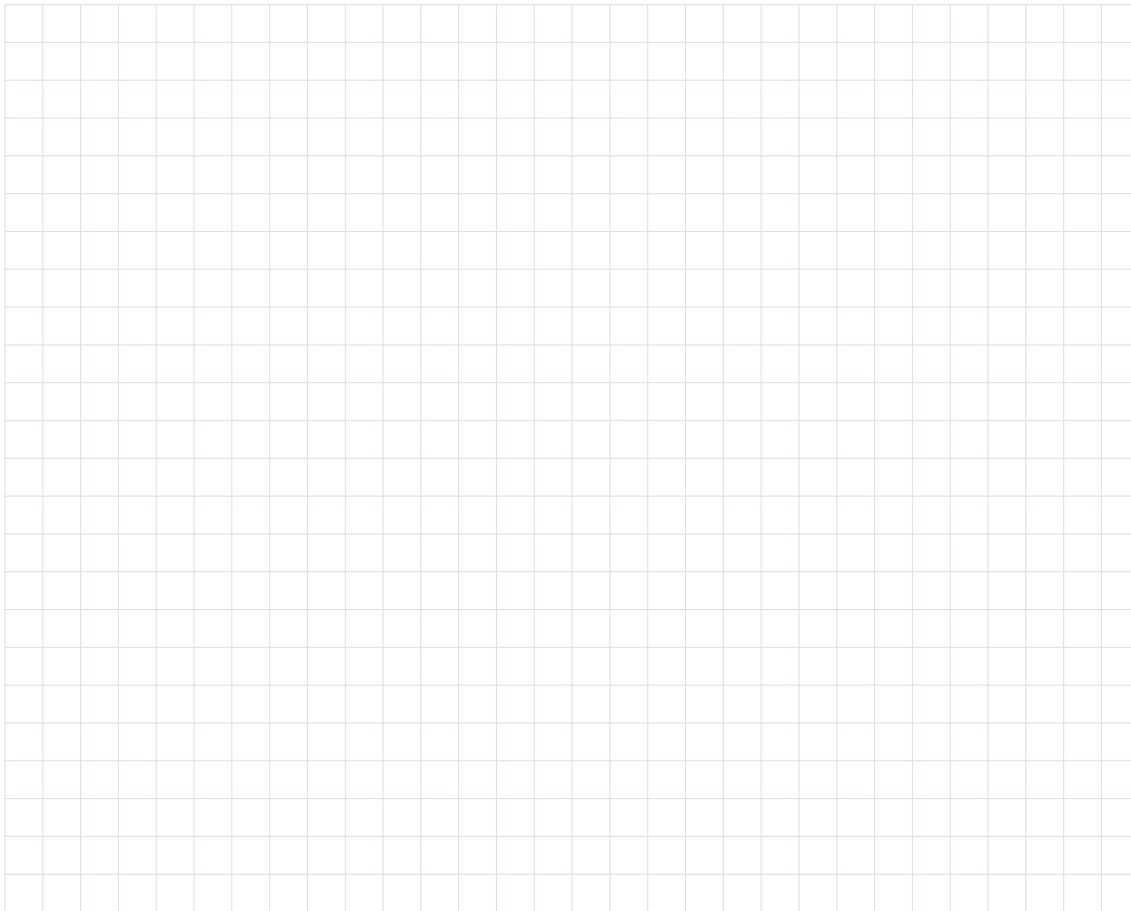
$16 < 4x \leq 28$. Dividimos entre 4:

$4 < x \leq 7 \implies x \in (4, 7]$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos algebraicos o lógicos.

1. ¿Por qué matemáticamente es obligatorio cambiar el sentido de la desigualdad al multiplicar o dividir por un número negativo? Demuéstrelo usando la recta real y números sencillos.
2. El infinito (∞) siempre lleva paréntesis o un intervalo abierto. ¿Cuál es el error conceptual de usar un corchete $[a, \infty]$?
3. Si $x < 5$ e $y > 2$, ¿es correcto afirmar por transitividad que $x > y$? Argumente con un contraejemplo.
4. Explique la diferencia conceptual entre las intersecciones \cap y las uniones \cup en la solución de desigualdades dobles.
5. Un estudiante resuelve $2x < 6$ y responde "x es 2". ¿Por qué esta respuesta es incompleta en el contexto de inecuaciones?
6. Si en el paso final de una inecuación obtengo $0 < 5$, ¿qué significa esto respecto a la variable inicial y cuál sería el conjunto solución?
7. Y si por el contrario, resuelvo y llego a $0 < -2$, ¿cómo interpreto este absurdo matemático para dar mi conjunto solución?
8. En un problema de velocidades vehiculares, resuelvo $v > -10$. Físicamente, ¿por qué debo intersectar este resultado con el dominio de la realidad ($v \geq 0$)?
9. Dibuje en la recta real la diferencia entre $[-3, 4)$ y $(-3, 4]$. ¿Qué puntos exactos las diferencian?
10. Si multiplico ambos lados de una desigualdad por la variable x (ej. $\frac{2}{x} < 4 \implies 2 < 4x$), ¿por qué es un error grave si no conozco el signo de x ?



Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $[7, \infty)$
2. $(-\infty, -3)$
3. $(-14, 1]$
4. $(-\infty, 4]$
5. $(-\infty, -1)$
6. $(-12/5, \infty)$
7. $(-\infty, 2]$
8. $[2, 6]$
9. $(4, 13/2)$
10. $(-\infty, 11]$
11. $(-12, \infty)$
12. $[-3, 3)$
13. $(-\infty, -20)$
14. $[-6, 10]$
15. $(2, 5]$
16. $(-\infty, -2] \cup (5, \infty)$
17. $(-\infty, -3/m)$ (por inversión)
18. $(-\infty, 7/3]$
19. $(1, \infty)$
20. $[-3, 4)$

Propuestos de Aplicación

1. $c < 500$
2. $d \leq 15$
3. $x \geq 15$
4. $m < 14$
5. $[12, 22]$
6. $p \leq 80$ m
7. $q \leq 75$ acciones
8. $t \geq 8$ horas
9. $x < 15$
10. $p \leq 12$
11. $m < 25$
12. $s \leq 15$
13. $d \leq 75$
14. $d \geq 3$
15. $c < 17$
16. $v < 40$
17. $h > 20$
18. $P > 24$
19. $[25, 100]$
20. $C \leq 10$

Potencial, ∞)

¡Misión Cumplida!

'Las ecuaciones nos enseñan dónde conformarnos con un solo punto. Las desigualdades nos enseñan que nuestras capacidades pertenecen a un intervalo infinito.'

- Tu futuro ilimitado

¡Gran trabajo! Acabas de abrir tu mente al análisis de conjuntos continuos. Sigue sumando conocimiento.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com