$|x - c| < r$

PRECÁLCULO

# DESIGUALDADES
## CON VALOR ABSOLUTO

**CUADERNO DE TRABAJO**

Interpretación de Distancias y Casos

$> a$

$x \in (c - r, c + r$


Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

# Teoría: Desigualdades con Valor Absoluto

Pensar en el valor absoluto solo como "quitarle el negativo.[es] limitar tu visión matemática. El valor absoluto $|x|$ representa la **distancia** exacta desde $x$ hasta el origen 0. Si escribimos $|x-c|$, estamos midiendo la distancia desde $x$ hasta un punto central $c$.

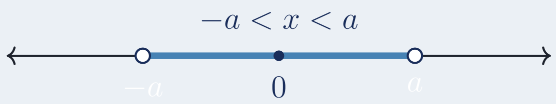
**PROFE TEO**
¡Chicos! Si les dicen "la tienda está a menos de 5 km de mi casa", pueden ir hacia el norte o hacia el sur. ¡Eso es un intervalo de intersección!

## 1. Distancia Menor que (Cercanía / Intersección)

Si queremos que la distancia sea **menor** a un radio $a$ (donde $a > 0$), nos mantenemos çerca"del origen.

$$|x| < a \iff -a < x < a$$

Esto forma un único segmento continuo en la recta real.

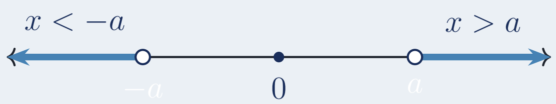



## 2. Distancia Mayor que (Lejanía / Unión)

Si queremos que la distancia sea **mayor** a un radio $a$ (donde $a > 0$), nos obligan a alejarnos del origen en ambas direcciones.

$$|x| > a \iff x < -a \vee x > a$$

Esto forma dos rayos que escapan hacia los infinitos.




**PROFE TEO**
**Peligro:** Si ven $|x| < -3$, no calculen nada. La distancia nunca es negativa, por lo que es **Falso** (C.S. $= \emptyset$). Si es $|x| > -3$, es **Verdadero** para todo $\mathbb{R}$.

## 3. Traslación del Centro

El modelo general $|x-c| < r$ significa "todos los números $x$ cuya distancia al centro $c$ es menor que el radio $r$". Se resuelve como: $-r < x - c < r \implies c - r < x < c + r$.

# Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: Intersección Directa ($<$)

**Enunciado:** Resuelva $|3x - 2| \leq 7$.
**Solución:** Como $7 \geq 0$, desdoblamos en una desigualdad compuesta:
$-7 \leq 3x - 2 \leq 7$.
Sumamos 2 a todo: $-5 \leq 3x \leq 9$.
Dividimos entre 3: $-5/3 \leq x \leq 3$.
**C.S.** $= [-5/3, 3]$.

### Problema Resuelto 2: Unión de Intervalos ($>$)

**Enunciado:** Resuelva $|4 - x| > 5$.
**Solución:** La distancia es mayor, nos alejamos. Dos casos separados por .º"($\vee$):
$4 - x > 5 \quad \vee \quad 4 - x < -5$.
Resolvemos 1: $-x > 1 \implies x < -1$.
Resolvemos 2: $-x < -9 \implies x > 9$.
**C.S.** $= (-\infty, -1) \cup (9, \infty)$.

### Problema Resuelto 3: Fracciones dentro del Valor Absoluto

**Enunciado:** Resuelva $\left|\frac{2x+1}{3}\right| < 4$.
**Solución:** $-4 < \frac{2x+1}{3} < 4$.
Multiplicamos por 3: $-12 < 2x + 1 < 12$.
Restamos 1: $-13 < 2x < 11$.
Dividimos entre 2: $-13/2 < x < 11/2$.
**C.S.** $= (-13/2, 11/2)$.

### Problema Resuelto 4: Cuadrática Interna

**Enunciado:** Resuelva $|x^2 - 5| \geq 4$.
**Solución:** Caso 1: $x^2 - 5 \geq 4 \implies x^2 \geq 9 \implies x \geq 3 \vee x \leq -3$.
Caso 2: $x^2 - 5 \leq -4 \implies x^2 \leq 1 \implies -1 \leq x \leq 1$.
Unimos todas las regiones válidas:
**C.S.** $= (-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup [3, \infty)$.

**PROFE TEO**
Siempre que tengan denominadores positivos constantes, pásenlos a multiplicar sin miedo. Si es una variable, ¡ahí sí cuidado, no se puede pasar multiplicando tan fácil!

### Problema Resuelto 5: Constante Negativa (Análisis Lógico)

**Enunciado:** Determine el C.S. de $|5x - 8| + 6 < 2$.
**Solución:** Despejamos el valor absoluto: $|5x - 8| < 2 - 6 \implies |5x - 8| < -4$.
Análisis: Un valor absoluto (distancia, siempre positiva o cero) no puede ser menor que un número negativo ($-4$).
**C.S.** $= \emptyset$ (Conjunto Vacío).

# Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

**Aplicación 1: Manufactura de Precisión**

**Contexto:** Un torno mecánico fabrica ejes de 25 mm de diámetro. El control de calidad aprueba la pieza si la variación de su diámetro $d$ es menor a 0,02 mm. Modele y halle los diámetros aprobados.
**Solución:** Modelo: $|d - 25| < 0{,}02$.
$-0{,}02 < d - 25 < 0{,}02$.
Sumamos 25: $24{,}98 < d < 25{,}02$.
**Rpta:** Ejes entre 24,98 y 25,02 mm.

**Aplicación 2: Biología Terrestre**

**Contexto:** Una especie de reptil mantiene su temperatura corporal ideal en 30°C. Entra en estado crítico si su temperatura $T$ fluctúa en 4°C o más. Determine las temperaturas de riesgo.
**Solución:** Modelo de riesgo (lejanía): $|T - 30| \geq 4$.
$T - 30 \geq 4 \implies T \geq 34°\text{C}$.
$T - 30 \leq -4 \implies T \leq 26°\text{C}$.
**Rpta:** Temperaturas iguales o menores a 26°C, o mayores o iguales a 34°C.

**Aplicación 3: Ingeniería Civil**

**Contexto:** La longitud de dilatación $L$ de un puente colgante, en metros, se considera estructuralmente segura siempre que cumpla la desigualdad $\left|\frac{L-100}{2}\right| \leq 1{,}5$. Calcule el rango de longitudes seguras.
**Solución:** $-1{,}5 \leq \frac{L-100}{2} \leq 1{,}5 \implies -3 \leq L - 100 \leq 3$.
Sumamos 100: $97 \leq L \leq 103$.
**Rpta:** El puente es seguro entre 97 y 103 metros.

**Aplicación 4: Finanzas Corporativas**

**Contexto:** Un fondo de inversión automatizado suspende compras si el precio $P$ de una acción difiere del promedio histórico de \$150 en más de \$12. Calcule los precios que activan la suspensión.
**Solución:** $|P - 150| > 12$.
$P - 150 > 12 \implies P > 162$.
$P - 150 < -12 \implies P < 138$.
**Rpta:** Suspensión si el precio baja de \$138 o sube de \$162.

**PROFE TEO**

Noten cómo la física y la ingeniería aman esta notación. El "100.es el valor ideal, y el "3"final es el margen de error real. ¡El valor absoluto empaqueta todo en una sola fórmula!

**Aplicación 5: Redes Satelitales**

**Contexto:** La latencia óptima de un servidor satelital es de 45 ms. El sistema desconecta usuarios si la desviación de la latencia $t$ supera un margen de error estricto de 5 ms. Halle los tiempos desconectados.

**Solución:** Desviación superada: $|t - 45| > 5$.

$t - 45 > 5 \implies t > 50$ ms.

$t - 45 < -5 \implies t < 40$ ms.

**Rpta:** Tiempos menores a 40 ms o mayores a 50 ms.

# Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos algebraicos.

1. Explique la diferencia gráfica en la recta real entre las soluciones de $|x| \leq 4$ y $|x| \geq 4$.
2. Si un problema físico se modela como $|v - 50| \leq 0$, ¿qué velocidad estricta $v$ debe llevar el móvil y por qué?
3. Un compañero resuelve $|x+2| > -1$ separando en casos: $x+2 > -1$ y $x+2 < 1$. ¿Por qué su proceso es innecesario? ¿Cuál es la respuesta directa?
4. En la expresión geométrica $|x - c| < r$, ¿qué roles interpretan las letras $c$ y $r$ en la recta numérica?
5. Demuestre por qué la inecuación $|2x - 1| < -5$ no tiene solución evaluando el concepto de distancia.
6. Al tener una desigualdad como $|x - 3| < |x + 1|$, elevar al cuadrado ambos lados preserva la equivalencia. ¿Por qué esto es matemáticamente legal aquí y no en desigualdades sin valor absoluto?
7. Traduzca la siguiente frase a una desigualdad con valor absoluto: "La temperatura $T$ se mantiene a menos de 3 grados de distancia del punto de ebullición ideal de 100 grados".
8. Si la solución de una desigualdad con valor absoluto es el intervalo $[-8, 2]$, halle mentalmente el centro $c$ y el radio de distancia $r$.
9. Explique qué ocurriría si intentamos usar intersecciones lógicas (como $a < x < b$) para resolver un caso de "mayor queçomo $|x| > 5$.
10. En un margen de error, ¿por qué es imposible plantear una tolerancia con valor absoluto usando un número negativo a la derecha de la desigualdad?

# Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

## Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** Resuelva y grafique: $|2x-4| \leq 8$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Es "menor o igual", usa el modelo de intersección:
$-\_\_\_\_\_ \leq 2x-4 \leq \_\_\_\_\_$

2. Suma 4 en todas partes:
$\_\_\_\_\_ \leq 2x \leq \_\_\_\_\_$

3. Divide entre 2:
$\_\_\_\_\_ \leq x \leq \_\_\_\_\_ \implies$ C.S. $= [\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_]$

**Problema 2.** Resuelva la unión: $|x+5| > 3$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Es "mayor", nos alejamos. Separa en dos casos con .º":
$x+5 > \_\_\_\_\_ \quad \vee \quad x+5 < \_\_\_\_\_$

2. Despeja $x$ en cada caso:
$x > \_\_\_\_\_ \quad \vee \quad x < \_\_\_\_\_$

3. Une los intervalos (ordenados de izquierda a derecha):
C.S. $= (-\infty, \_\_\_\_\_) \cup (\_\_\_\_\_, \infty)$

**Problema 3.** Con fracción: $\left|\frac{3x-1}{2}\right| < 5$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Desdobla la desigualdad continua:
$\_\_\_\_\_ < \frac{3x-1}{2} < \_\_\_\_\_$

2. Multiplica por 2 y suma 1:
$\_\_\_\_\_ < 3x < \_\_\_\_\_$

3. Divide entre 3:
$\_\_\_\_\_ < x < \_\_\_\_\_ \implies$ C.S. $= (\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_)$

## Problemas Generales

**Problema 4.** Halle el C.S. de: $|x-7| \leq 12$.

**Problema 5.** Resuelva la disyunción: $|2x+3| > 9$.

**Problema 6.** Despeje el valor absoluto y resuelva: $|4x-1|+5 < 10$.

**Problema 7.** Resuelva y analice: $|x+8| \geq -2$.

**Problema 8.** Resuelva la fracción doble: $\left|\frac{2-x}{4}\right| \leq 3$.

**Problema 9.** Intervalo de solución para: $3|2x-5|-4 > 11$.

**Problema 10.** Calcule el conjunto: $|5-3x| < 8$.

**Problema 11.** Analice el absurdo: $2|x+1|+15 \leq 5$.

**PROFE TEO**

¿Listos para subir de nivel? A partir de ahora las fracciones y los signos negativos jugarán con su mente. Mantengan el orden y no se saltarán pasos.

**Problema 12.** Inecuación lineal múltiple: $1 < |x-2| < 4$.

**Problema 13.** Despeje invirtiendo signo interno: $|-2x+6| \geq 10$.

**Problema 14.** Cuadrática anidada: $|x^2 - x| < 6$.

**Problema 15.** Resuelva la cuadrática exterior: $|x^2 - 10| \geq 6$.

**Problema 16.** Fracción con x abajo (Eleve al cuadrado): $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| < 2$.

**Problema 17.** Valor absoluto doble: $|2x-3| \leq |x+4|$.

**Problema 18.** C.S. anidado: $||x| - 3| < 2$.

**Problema 19.** Inecuación con variable fuera: $|x-2| < 2x-1$. (Requiere $2x-1 > 0$).

**Problema 20.** Sistema condicional: Halle $\mathbb{Z}$ si $|x| < 5$ y $|x - 1| \geq 2$.

# Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

## Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** Una cámara frigorífica de un laboratorio farmacéutico debe estar a 4°C. Las vacunas se arruinan si la temperatura $T$ excede una tolerancia de 1,5°C. Escriba la inecuación de seguridad y halle el rango óptimo.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Ecuación de seguridad (cercanía): $|T - \_\_\_\_| \leq \_\_\_\_$ 2. Desdobla: $\_\_\_\_ \leq T - 4 \leq \_\_\_\_$ 3. Rango seguro: $[\_\_\_\_°\mathrm{C}, \_\_\_\_°\mathrm{C}]$.

**Problema 2.** Un radar vial detecta infractores si la velocidad $v$ de un auto difiere del límite central de 80 km/h en más de 15 km/h. Exprese la zona de multas y halle los rangos de penalización.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Condición de penalización (lejanía): $|v - \_\_\_\_| > \_\_\_\_$ 2. Dos casos: $v - 80 > \_\_\_\_ \implies v > \_\_\_\_$ o $v - 80 < -\_\_\_\_ \implies v < \_\_\_\_$ 3. Multas si $v \in (0, \_\_\_\_) \cup (\_\_\_\_, \infty)$ km/h.

**Problema 3.** Un molino empaca harina en sacos de 50 kg. El lote se rechaza por calidad si el peso $P$ presenta una variación que supera los 0,8 kg. Determine el peso de los sacos descartados.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Inecuación de rechazo: $|P - \_\_\_\_| > \_\_\_\_$ 2. Resuelve el primer rayo: $P - 50 > 0{,}8 \implies P > \_\_\_\_$ 3. Resuelve el segundo rayo: $P - 50 < -0{,}8 \implies P < \_\_\_\_$

## Problemas Generales Contextualizados

**Problema 4.** Una constructora vierte concreto con un pH ideal de 10,5. La mezcla se debilita si la acidez oscila en más de 0,5 puntos. Calcule los valores de pH que garantizan la dureza del cemento.

**Problema 5.** Un submarino navega en piloto automático a 200 metros de profundidad. Suena una alerta de presión si desciende o asciende drásticamente más de 45 metros. Establezca los niveles de inmersión donde suena la alarma.

**Problema 6.** La frecuencia de emisión de una radio FM es 95,5 MHz. La señal sufre interferencia si el dial $f$ del usuario se aleja a más de 0,2 MHz de la antena. Halle las frecuencias estables.

**Problema 7.** Una empresa tecnológica garantiza que la batería de sus celulares dura 18 horas de uso continuo, con un margen de fluctuación absoluto que nunca excede las 1,2 horas. Calcule la autonomía real en intervalo.

**Problema 8.** El ángulo de inclinación $\alpha$ de un panel solar respecto al techo es óptimo en 35°. Pierde eficiencia máxima si la instalación varía en 4° o más. Halle los grados ineficientes.

**Problema 9.** En agronomía, la germinación de una semilla requiere una humedad relativa $H$ centrada en 65 %. Si la humedad se desvía más de un 8 %, el brote muere. Determine los porcentajes letales para la siembra.

**Problema 10.** Un circuito eléctrico exige una resistencia $R$ de 120 ohmios. Si se usa una banda de tolerancia del 5 % (6 ohmios), escriba la desigualdad absoluta y halle las resistencias admisibles por el sistema.

**Problema 11.** Un sismógrafo de alta sensibilidad registra microsismos. Si la amplitud basal es de 10 mm y un temblor causa una alteración $A$ tal que $|A - 10| \geq 40$, clasifique las amplitudes extremas resultantes.

**Problema 12.** La presión de un fluido en una tubería de gasoducto es 150 psi. La válvula de escape revienta si la presión $P$ fluctúa superando los 25 psi de margen. ¿A qué presiones explota el ducto?

**Problema 13.** Un reloj atómico tiene un desfase $t$ (en microsegundos) respecto a la hora universal. Si la desincronización es grave cuando $\left|\frac{t-5}{2}\right| > 10$, evalúe los desfases de error crítico.

**Problema 14.** Un restaurante rápido despacha combos en 180 segundos promedio. Si el cliente recibe su pedido fuera del margen de 15 segundos de diferencia, la app le otorga un cupón de descuento. Halle dichos tiempos promocionales.

**Problema 15.** Una aleación de acero se funde exactamente a 1400°C. Si la variación térmica excede la décima parte del punto de fusión, el metal cristaliza mal. Formule la desigualdad y calcule las temperaturas donde la aleación fracasa.

**Problema 16.** Una clínica regula las pulsaciones de un atleta en reposo a 60 lpm. La prueba de esfuerzo cardiovascular detiene la caminadora si la desviación absoluta supera los 85 lpm. ¿Qué pulsaciones activan el paro automático?

**Problema 17.** Un bus interprovincial proyecta llegar a su destino en 10 horas. La empresa indemniza si el tiempo real de viaje $t$ tiene una diferencia con el estimado mayor a 1,5 horas. Especifique los tiempos compensables.

**Problema 18.** La órbita de un telescopio espacial debe estar a 400 km. Los motores corrigen la ruta automáticamente cuando el error de altitud satisface $|2h - 800| \geq 15$. Halle las altitudes de corrección del vector.

**Problema 19.** Un algoritmo de inteligencia artificial analiza la diferencia simétrica de pixeles. La anomalía facial se marca si el umbral $x$ obedece $|x - 128| < 50$. Defina el rango de los valores anómalos aceptados.

**Problema 20.** En acústica, una sala de grabación debe tener una reverberación $R$ de 1,2 segundos. El ingeniero rechaza los materiales de pared si $|R - 1{,}2| \geq 0{,}35$. Calcule los tiempos de rebote sonoro inaceptables.

# Claves de Respuestas

**Propuestos Matemáticos**

1. $[-2, 6]$
2. $(-\infty, -8) \cup (-2, \infty)$
3. $(-3, 11/3)$
4. $[-5, 19]$
5. $(-\infty, -6) \cup (3, \infty)$
6. $(-1, 3/2)$
7. $\mathbb{R}$ (Todo el conjunto real)
8. $[-10, 14]$
9. $(-\infty, 0) \cup (5, \infty)$
10. $(-1, 13/3)$
11. $\emptyset$ (Sin solución)
12. $(-2, 1) \cup (3, 6)$
13. $(-\infty, -2] \cup [8, \infty)$
14. $(-2, 3)$
15. $(-\infty, -4] \cup [-2, 2] \cup [4, \infty)$
16. $(-\infty, 1/3) \cup (3, \infty)$
17. $[-1/3, 7]$
18. $(-5, -1) \cup (1, 5)$
19. $(1, \infty)$
20. $\{-4, -3, -2, -1, 3, 4\}$

**Propuestos de Aplicación**

1. $[2{,}5, 5{,}5]$°C
2. $v < 65 \lor v > 95$ km/h
3. $P < 49{,}2 \lor P > 50{,}8$ kg
4. $[10{,}0, 11{,}0]$ pH
5. $p < 155 \lor p > 245$ m
6. $[95{,}3, 95{,}7]$ MHz
7. $[16{,}8, 19{,}2]$ horas
8. $\alpha \leq 31° \lor \alpha \geq 39°$
9. $H < 57\,\% \lor H > 73\,\%$
10. $[114, 126]$ ohmios
11. $A \leq -30 \lor A \geq 50$ mm
12. $P < 125 \lor P > 175$ psi
13. $t < -15 \lor t > 25$ $\mu$s
14. $t < 165 \lor t > 195$ seg
15. $T < 1260 \lor T > 1540$°C
16. $p > 145$ lpm (o $p < -25$ absurdo físico)
17. $t < 8{,}5 \lor t > 11{,}5$ hrs
18. $h \leq 392{,}5 \lor h \geq 407{,}5$ km
19. $(78, 178)$
20. $R \leq 0{,}85 \lor R \geq 1{,}55$ seg

|Límite|

# ¡Misión Cumplida!

’Mantenerte a una corta distancia de tus objetivos asegura el éxito, pero alejarte de tu zona de confort es lo que expande tus horizontes hacia el infinito.’

- La geometría de la vida

¡Has superado la prueba! Ya sabes cómo controlar márgenes de error e intervalos de tolerancia en todo el universo matemático.

$\leq \infty$

**Prof. Teófilo Teves**

**www.teoteves.com**