CÁLCULO DE UNA VARIABLE

DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

CUADERNO DE TRABAJO

Segunda Derivada, Notaciones y Aceleración

$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$

$\frac{d^n y}{dx^n}$

$a(t) = v'(t)$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Derivando la Derivada

La derivada de una función $f(x)$ es otra función $f'(x)$. Dado que $f'(x)$ es una función en sí misma, ¡nada nos impide volver a derivarla! A este proceso iterativo se le conoce como el cálculo de **derivadas de orden superior**.

1. Notaciones de Orden Superior

Si $y = f(x)$, sus derivadas sucesivas se denotan de la siguiente manera:

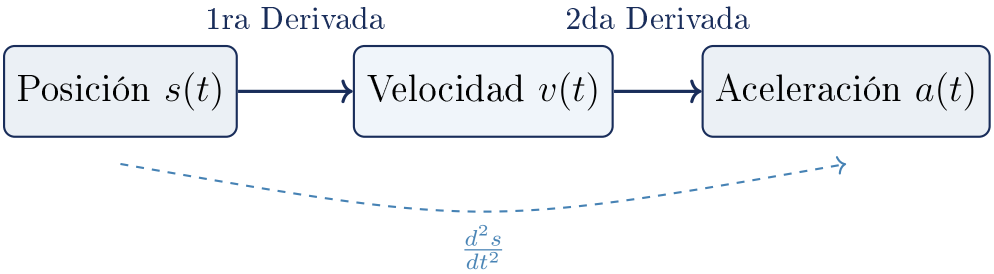
- **Primera derivada:** y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}[f(x)]$
- **Segunda derivada:** y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$
- **Tercera derivada:** y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$
- **Derivada n-ésima:** $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$ (Usamos paréntesis para $n \geq 4$).

PROFE TEO
Cuidado con la notación de Leibniz para la segunda derivada: $\frac{d^2y}{dx^2}$. El "2"va sobre la "d.en el numerador, pero sobre la "x.en el denominador. ¡No escribas $\frac{dy^2}{dx^2}$!

2. Interpretación Física: Cinemática

Si la posición de un objeto en el tiempo t está dada por la función $s(t)$:

1. La **velocidad** $v(t)$ es la primera derivada de la posición: $v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$.
2. La **aceleración** $a(t)$ es la tasa de cambio de la velocidad, es decir, la **segunda derivada** de la posición: $a(t) = v'(t) = s''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$.



PROFE TEO
¡Un error letal! Muchos alumnos piensan que una aceleración negativa siempre significa "frenar". Falso. Si la velocidad es negativa y la aceleración también, el objeto está acelerando hacia atrás.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Polinomio Secuencial

Enunciado: Determine la tercera derivada de $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 7$. **Solución:** Derivamos sucesivamente aplicando la regla de la potencia: $f'(x) = 8x^3 - 15x^2 + 2x$ $f''(x) = 24x^2 - 30x + 2$ $f'''(x) = 48x - 30$ **Respuesta:** $f'''(x) = 48x - 30$.

Problema Resuelto 2: Ciclo Trigonométrico

Enunciado: Obtenga $y^{(4)}$ si $y = \cos(3x)$. **Solución:** Usamos la regla de la cadena iterativamente: $y' = -3\sin(3x)$ $y'' = -9\cos(3x)$ $y''' = 27\sin(3x)$ $y^{(4)} = 81\cos(3x)$ **Respuesta:** $y^{(4)} = 81\cos(3x)$.

PROFE TEO
Las funciones trigonométricas $\sin(x)$ y $\cos(x)$ operan en ciclos de 4. La cuarta derivada de $\sin(x)$ vuelve a ser exactamente $\sin(x)$. ¡Esto te ahorra cálculos enormes!

Problema Resuelto 3: Regla del Producto Reiterada

Enunciado: Calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $y = x^2\ln(x)$. **Solución:** Primera derivada (regla del producto): $y' = (2x)\ln(x) + x^2\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\ln(x) + x$ Segunda derivada (aplicamos producto de nuevo al primer término): $y'' = \left[2\ln(x) + 2x\left(\frac{1}{x}\right)\right] + 1 = 2\ln(x) + 2 + 1$ **Respuesta:** $y'' = 2\ln(x) + 3$.

Problema Resuelto 4: Segunda Derivada Implícita

Enunciado: Halle y'' para la circunferencia $x^2+y^2 = 9$. **Solución:** Derivamos implícitamente: $2x + 2yy' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y}$. Derivamos y' usando la regla del cociente para hallar y'': $y'' = -\frac{(1)(y)-(x)(y')}{y^2} = -\frac{y-x(-x/y)}{y^2} = -\frac{y+x^2/y}{y^2}$ Multiplicamos numerador y denominador por y: $y'' = -\frac{y^2+x^2}{y^3}$. Como $x^2 + y^2 = 9$: **Respuesta:** $y'' = -\frac{9}{y^3}$.

Problema Resuelto 5: El Patrón Exponencial

Enunciado: Encuentre una fórmula general para $f^{(n)}(x)$ si $f(x) = e^{-2x}$. **Solución:** $f'(x) = -2e^{-2x}$ $f''(x) = (-2)(-2)e^{-2x} = (-2)^2e^{-2x}$ $f'''(x) = (-2)^3e^{-2x}$ Observamos que el exponente numérico baja multiplicando en cada paso. **Respuesta:** $f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}$.

PROFE TEO
En las derivadas implícitas de segundo orden, siempre debes sustituir la y' de tu primer paso dentro de la y'', y luego intentar usar la ecuación original para simplificar el numerador.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Frenado de Tren

Contexto: Un vagón ferroviario frena su trayectoria proyectando una posición $s(t) = 150t - 2t^3$ metros. Obtenga la desaceleración exacta que sufren los frenos hidráulicos cruzando el cuarto segundo.
Solución: Velocidad: $v(t) = s'(t) = 150 - 6t^2$. Aceleración: $a(t) = v'(t) = -12t$. Evaluando $t = 4$: $a(4) = -12(4) = -48$. **Respuesta:** Desacelera a 48 m/s^2.

Aplicación 2: Ascenso de Cohete

Contexto: El fuselaje de un dron experimental describe altitud geométrica mediante $h(t) = t^4 - 8t^2$ metros. Cuantifique la fuerza de empuje acelerativo soportando la estructura ingresando al tercer segundo temporal.
Solución: $v(t) = 4t^3 - 16t$. $a(t) = 12t^2 - 16$. En $t = 3$: $a(3) = 12(9) - 16 = 108 - 16 = 92$. **Respuesta:** Acelera a 92 m/s^2.

Aplicación 3: Dinámica Poblacional

Contexto: Una colonia bacteriana muta su densidad celular bajo $N(t) = 500e^{0,2t}$ organismos por hora. Identifique la aceleración del brote infeccioso cruzando el décimo ciclo horario continuo.
Solución: Velocidad de brote: $N'(t) = 100e^{0,2t}$. Aceleración de brote: $N''(t) = 20e^{0,2t}$. Evaluando en $t = 10$: $N''(10) = 20e^2$. **Respuesta:** Acelera en $20e^2$ bacterias/h^2.

PROFE TEO

La aceleración es la tasa de cambio de la velocidad. Si una bacteria crece poblacionalmente, su segunda derivada nos dice si ese ritmo de crecimiento se está disparando o si se está estabilizando.

Aplicación 4: Vaciamiento Hidráulico

Contexto: Una cisterna industrial pierde volumen proyectando capacidad $V(t) = 40(12 - t)^2$ litros. Calcule la variación marginal del caudal extractivo analizando la fluidez pura del sistema hídrico de descarte.
Solución: Caudal (velocidad): $V'(t) = 80(12 - t)(-1) = -960 + 80t$. Variación del caudal (aceleración): $V''(t) = 80$. **Respuesta:** Cambia a un ritmo constante de 80 L/min^2.

Aplicación 5: Utilidad Marginal

Contexto: La ganancia corporativa tecnológica refleja retornos $P(x) = 1200x - 0,5x^3$ dólares. Despeje el factor de aceleración financiera marginal registrando exactamente diez lotes vendidos.
Solución: Utilidad marginal: $P'(x) = 1200 - 1,5x^2$. Aceleración de utilidad: $P''(x) = -3x$. Para $x = 10$: $P''(10) = -30$. **Respuesta:** La ganancia se desacelera -30 USD/lote^2.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Analice la afirmación: "Si la segunda derivada de una función es cero, significa que el objeto está en reposo absoluto". Desmienta este concepto usando las leyes del movimiento rectilíneo uniforme.

2. Argumente con un ejemplo polinómico simple por qué la derivada n-ésima de un polinomio de grado n es siempre una constante, y su $(n+1)$-ésima derivada es invariablemente cero.

3. Geométricamente, la primera derivada indica la pendiente. Investigue e intente explicar brevemente qué rasgo visual de la curva original nos describe el signo de la segunda derivada (Pista: Concavidad).

4. Si evaluamos la posición de un móvil y obtenemos $v(t) = -5$ m/s y $a(t) = -2$ m/s^2, justifique mecánicamente si el móvil está incrementando o disminuyendo su rapidez real.

5. Relacione la notación de Leibniz $\frac{d^2y}{dx^2}$ con el concepto de operadores. ¿Por qué el cuadrado superior envuelve solo a la "d"diferencial, mientras el inferior envuelve al bloque completo "dx¿

6. Un analista financiero descubre que los ingresos de su empresa crecen ($I' > 0$), pero su segunda derivada es negativa ($I'' < 0$). Traduzca este escenario a un diagnóstico corporativo realista.

7. Evalúe el esfuerzo algorítmico de calcular $f^{(100)}(x)$ para $f(x) = \sin(x)$ frente a $g(x) = e^x$. ¿Qué propiedades cíclicas y de inmunidad facilitan este cálculo masivo?

8. Detalle el protocolo algebraico que vuelve tan extensa la segunda derivada implícita, justificando por qué es obligatorio retroinyectar el resultado de la primera derivada antes de terminar.

9. Analice la aceleración constante de la gravedad ($g = -9{,}8$ m/s^2). Integre mentalmente el concepto para demostrar por qué la ecuación de posición de caída libre debe ser obligatoriamente una parábola cuadrática.

10. Demuestre usando la regla del producto que la segunda derivada de $y = u(x)v(x)$ no es simplemente $u''v''$, sino que genera un desarrollo análogo a un binomio al cuadrado perfecto.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Calcule $f''(x)$ para la expresión polinomial $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 8$.

Guía de Solución Interactiva

1. Hallamos la primera derivada: $f'(x) =$ ______________ $- 4x$.
2. Derivamos nuevamente el resultado anterior: $f''(x) =$ ______________ $-$ _____.
3. La segunda derivada consolidada es: $f''(x) =$ ______________.

Problema 2. Obtenga la segunda derivada de $y = \cos(4x)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Usamos la regla de la cadena: $y' = -4\sin($______________$)$.
2. Volvemos a aplicar regla de la cadena: $y'' = -4 \cdot [$______________$]$.
3. Multiplicando coeficientes: $y'' =$ ______________.

Problema 3. Determine y'' para la función logarítmica $y = \ln(3x)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Primera derivada: $y' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{\_\_\_\_} = x^{\_\_\_\_}$.
2. Derivamos usando la regla de potencia negativa: $y'' = -1 \cdot x^{\_\_\_\_}$.
3. Retornamos a fracción: $y'' = \frac{-1}{\_\_\_\_\_\_}$.

PROFE TEO

Cuando busques la segunda derivada de un logaritmo natural, la primera te dará una fracción $1/u$. Para la segunda derivada, no uses la regla del cociente si el numerador es 1; mejor sube el denominador con exponente negativo. ¡Es más rápido!

Problemas Generales Analíticos

Problema 4. Calcule $f'''(x)$ para $f(x) = x^6 - 4x^5 + x$.

Problema 5. Determine la segunda derivada de $y = e^{-3x+1}$.

Problema 6. Halle y'' usando regla del producto para $y = x^3 e^x$.

Problema 7. Derive dos veces la función racional $g(x) = \frac{2}{x+1}$.

Problema 8. Resuelva la cuarta derivada $y^{(4)}$ de $y = \sin(x) + \cos(x)$.

Problema 9. Encuentre el valor evaluado de $f''(1)$ para $f(x) = (2x-1)^4$.

Problema 10. Derive implícitamente hallando y'' para la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

Problema 11. Determine $\frac{d^2y}{dx^2}$ para la estructura trigonométrica $y = \tan(x)$.

Problema 12. Obtenga la tercera derivada y''' de $y = \sqrt{x}$.

Problema 13. Derive encontrando y'' para el producto $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.

Problema 14. Halle y'' simplificando fuertemente el cociente $y = \frac{x}{x-2}$.

Problema 15. Calcule la segunda derivada implícita en $(1, 1)$ para $xy = 1$.

Problema 16. Deduzca la fórmula de la derivada n-ésima de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Problema 17. Resuelva el operador analítico encontrando y'' para $y = \ln(x^2 + 1)$.

Problema 18. Encuentre $f''(x)$ para la composición exponencial $f(x) = e^{x^2}$.

Problema 19. Determine la aceleración tangencial $a(t)$ si la posición es $s(t) = t\ln(t)$.

Problema 20. Halle la tercera derivada $f'''(\pi)$ para $f(x) = x\sin(x)$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un resorte mecánico amortigua vibraciones trazando longitud $L(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t$. Cuantifique la aceleración tensional expansiva franqueando los dos segundos operativos de ensayo.

Guía de Solución Interactiva

1. Extraemos velocidad $v(t) = L'(t) = 6t^2 - \_\_\_\_ t + 12$. 2. Derivando aceleración $a(t) = v'(t) = \_\_\_\_ t - \_\_\_\_$. 3. Evaluación final resulta ________ unidades absolutas.

Problema 2. La densidad magnética de un estator oscila generando flujo $B(x) = \sin(2x)$. Determine el gradiente de aceleración inductiva cruzando el horizonte de fase en pi cuartos radianes magnéticos.

Guía de Solución Interactiva

1. Variación primaria $B'(x) = \_\_\_\_ \cos(2x)$. 2. Gradiente acelerativo $B''(x) = -\_\_\_\_ \sin(2x)$. 3. Efectuando impacto evaluativo arroja ________ teslas vectoriales.

Problema 3. Una torre de enfriamiento evapora refrigerante condensado según masa $M(h) = e^{-0,5h}$. Calcule la aceleración de dispersión calórica masiva registrando cuatro horas continuas térmicas.

Guía de Solución Interactiva

1. Fuga marginal $M'(h) = -\_\_\_\_ e^{-0,5h}$. 2. Aceleración térmica $M''(h) = \_\_\_\_ e^{-0,5h}$. 3. Inyección temporal marca ________ gramos evaporados.

····▷ **PROFE TEO**

Las tasas relacionadas de nivel avanzado piden medir la 'aceleración' de un volumen o área. Si el caudal (V') disminuye constantemente, el volumen experimentará una aceleración negativa de descompresión.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. El brazo robótico industrial perfila soldaduras ejecutando desplazamiento $s(t) = 5t^4 - 2t^3$. Cuantifique el estrés de torque mecánico midiendo aceleración pura al segundo uno logístico.

Problema 5. La aerodinámica del paracaídas frena caídas verticales bajo altura $h(t) = 100 - 4t^{5/2}$. Diagnostique el tirón de gravedad instantáneo percibido exacto en cuatro segundos aéreos.

Problema 6. La rentabilidad contable proyectada de servidores mineros escala utilidades $U(x) = \ln(x^2+1)$. Halle la aceleración financiera del rendimiento operando tres clusters paralelos criptográficos.

Problema 7. Una reacción química catalizadora disuelve sustrato midiendo concentración residual $C(m) = \frac{10}{m+2}$. Precíse la estabilización acelerativa disolvente añadiendo dos miligramos activos orgánicos.

Problema 8. El campo eléctrico de un condensador disipa estática voltaje $V(t) = t^2 e^{-t}$. Verifique el pico de desaceleración electromagnética franqueando el primer milisegundo transitorio aislante.

Problema 9. Un dron fotogramétrico traza cuadrantes topográficos surcando barridos $s(\theta) = \theta \sin(\theta)$. Determine la aceleración angular de las hélices estabilizadoras capturando coordenadas cenit ortogonales pi medios radianes.

Problema 10. La viscosidad arterial empuja torrente sanguíneo profiláctico modelado caudal $Q(r) = r(R^2 - r^2)$. Calcule el freno de cizalladura biológico derivando aceleración evaluada en r origen vascular central absoluto.

Problema 11. Un algoritmo de compresión zip comprime bytes reduciendo tamaño $T(b) = b^3 - \ln(b)$. Evalue la fluctuación de estrés compresión memoria iterando el segundo bloque informático encriptado.

Problema 12. La tracción de neumáticos en monoplazas degrada caucho asfáltico exponiendo fatiga $F(v) = v^4 - 10v^2$. Obtenga el índice de abrasión acelerativo cruzando velocidad crítica dos metros rodantes.

Problema 13. La óptica hiperbólica difracta lúmenes curvos refractando índices luminosos $I(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Diagnostique la distorsión focal secundaria registrando impacto lente pulido coordenado número unitario cero perfecto.

Problema 14. Un pozo petrolífero bombea crudo viscoso presurizando válvulas anulares extractoras dictadas bajo $P(t) = (t-5)^4$. Calcule la sacudida de golpe ariete hidráulico acelerando flujo extractivo instante seis barriles.

Problema 15. El decaimiento nuclear en reactores traza radiación isótopos $N(s) = 1000 \cdot 2^{-s}$. Precise la velocidad de estabilización radiactiva acelerativa quemando exactamente tres siglos de semivida contenida.

Problema 16. Las mareas oceánicas oscilan nivel marítimo muelle atracadero mediante función $A(h) = 5\cos(\pi h/6)$. Cuantifique el empuje de flotabilidad secundaria golpeando casco durante tercera hora marea.

Problema 17. El índice de inflación macroeconómico devalúa divisas registrando caída de paridad poder $D(m) = \sqrt{m^2+9}$. Verifique la aceleración del desplome financiero sosteniendo recesión interanual cuarto mes comercial.

Problema 18. La fibra muscular absorbe ácido láctico fatigando resistencia contracción $R(c) = ce^{2c}$. Establezca la ruptura tensional de agotamiento celular superando contracción esfuerzo medio miligramo metabólico muscular.

Problema 19. Una turbina hidroeléctrica desvía torrente hídrico ajustando paletas angulares según $Q(\alpha) = \tan^2(\alpha)$. Halle la tensión mecánica secundaria absorbiendo empuje angular desviado pi sextos radianes de cuenca.

Problema 20. La sonda interestelar enciende propulsores iónicos expulsando plasma constante inercial dictando vector $V(z) = \frac{\sin(z)}{z}$. Evalúe el microimpulso de choque gravitacional residual asintótico franqueando límite matemático espacial cero.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $60x^2 - 4$.
2. $-16\cos(4x)$.
3. $-1/x^2$.
4. $120x^3 - 240x^2$.
5. $9e^{-3x+1}$.
6. $xe^x(x^2 + 6x + 6)$.
7. $4/(x + 1)^3$.
8. $\sin(x) + \cos(x)$.
9. 192.
10. $-1/(4y^3)$.
11. $2\sec^2(x)\tan(x)$.
12. $\frac{3}{8}x^{-5/2}$.
13. $-4\sin(x)\cos(x)$.
14. $4/(x - 2)^3$.
15. 2.
16. $(-1)^n n!/x^{n+1}$.
17. $2(1 - x^2)/(x^2 + 1)^2$.
18. $2e^{x^2}(2x^2 + 1)$.
19. $1/t$.
20. $-\pi - 3$.

Propuestos de Aplicación

1. 6 unidades.
2. -4 teslas.
3. $0{,}25e^{-2}$ gramos.
4. 48 estrés/torque.
5. -30 tirón gravedad.
6. $-0{,}16$ rendimiento.
7. 0,3125 miligramos.
8. e^{-1} desaceleración.
9. $-\pi/2$ rad/s^2.
10. $-6R$ origen vascular.
11. 12,25 estrés byte.
12. 28 abrasión.
13. 0 distorsión cero.
14. 12 sacudida.
15. $125(\ln 2)^2$ radiación.
16. 0 empuje (coseno pi medios).
17. 9/125 desplome.
18. $8e$ tensión muscular.
19. 40/9 tensión mecánica.
20. $-1/3$ microimpulso (Límite L'Hopital).

¡El Ritmo del Ritmo!

'La primera derivada nos enseña que el universo está en constante movimiento. Pero la segunda derivada nos revela el secreto del impulso: saber cómo y por qué cambia ese movimiento. En tu formación, no solo basta con avanzar; lo que realmente importa es tu capacidad de acelerar y superar tus propios límites día a día.'

- La regla del avance constante y acelerado

¡Enhorabuena! Has conquistado la dinámica profunda del cálculo infinitesimal.

$f''(x)$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com