$(\sin x)' = \cos x$

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

DERIVADAS
TRIGONOMÉTRICAS

CUADERNO DE TRABAJO

Definición de Límite y Reglas Algebraicas

$= \sec^2 x$

$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} =$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Las Ondas del Cálculo

Las funciones trigonométricas modelan fenómenos periódicos, desde péndulos hasta ondas electromagnéticas. Para calcular sus tasas de variación instantánea, primero debemos demostrar sus derivadas mediante la definición formal de límite, apoyándonos en identidades de suma de ángulos y dos límites trigonométricos notables fundamentales.

1. Los Límites Notables Base

Para demostrar las derivadas, requerimos obligatoriamente estos dos límites cuando h tiende a cero (demostrables por compresión o Sándwich):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

PROFE TEO

¡Atención extrema! En cálculo, la variable x de las funciones trigonométricas SIEMPRE está en radianes. Si usas grados, las fórmulas de las derivadas fallan catastróficamente.

2. Demostración de la Derivada del Seno

Sea $f(x) = \sin(x)$. Aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Usamos la identidad $\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \left[\sin(x)\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos(x)\left(\frac{\sin h}{h}\right)\right]$$

Evaluando los límites notables: $f'(x) = \sin(x)(0) + \cos(x)(1) = \cos(x)$.

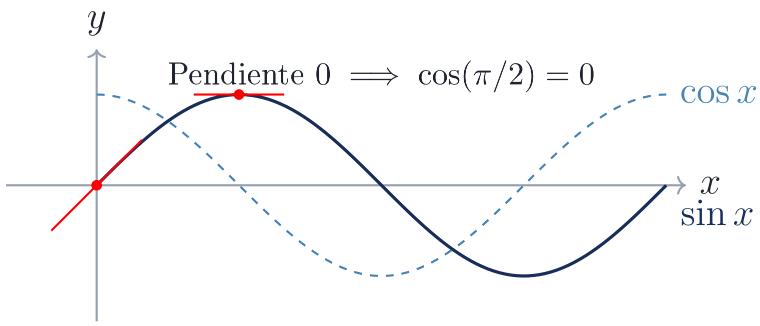
3. Tabla de Derivadas Trigonométricas

Combinando los límites y las reglas del cociente, obtenemos el set completo:

- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

PROFE TEO

¡Un truco para memorizar signos! Todas las funciones trigonométricas que empiezan con C (Coseno, Cosecante, Cotangente) tienen derivadas NEGATIVAS.



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Demostración del Coseno

Enunciado: Demuestre mediante el límite del cociente diferencial que $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.
Solución:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h}$$

Agrupamos los términos con $\cos x$:

$$\lim_{h\to 0} \left[\cos x \left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \sin x \left(\frac{\sin h}{h}\right)\right]$$

Sustituyendo los límites notables obtenemos $\cos x(0) - \sin x(1) = -\sin x$.

Problema Resuelto 2: Regla del Cociente para Tangente

Enunciado: Deduzca la derivada de $y = \tan x$ empleando la regla del cociente.
Solución: Sabiendo que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$:

$$y' = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Usando la identidad pitagórica ($\cos^2 x + \sin^2 x = 1$):

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

PROFE TEO

Para derivar $\tan(x)$ no necesitas límites complejos. Recuerda la identidad $\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ y atácala con la regla del cociente directo.

Problema Resuelto 3: Producto de Trigonométricas

Enunciado: Halle la derivada de la función $f(x) = x^2 \sin x \cos x$.
Solución: Primero, usamos una identidad de ángulo doble para simplificar: $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x)$$

Aplicamos la regla del producto y la regla de la cadena para el seno:

$$f'(x) = (x)(\sin(2x)) + \left(\frac{1}{2}x^2\right)(\cos(2x)\cdot 2)$$

$$f'(x) = x\sin(2x) + x^2\cos(2x)$$

Problema Resuelto 4: Derivadas de Orden Superior

Enunciado: Encuentre la derivada de cuarto orden ($y^{(4)}$) para la función $y = \sin x$.
Solución: Derivamos secuencialmente: 1. $y' = \cos x$ 2. $y'' = -\sin x$ 3. $y''' = -\cos x$ 4. $y^{(4)} = -(-\sin x) = \sin x$ Las derivadas del seno y coseno forman un ciclo que se repite exactamente cada 4 derivadas.

Problema Resuelto 5: Pendiente Horizontal

Enunciado: Determine los puntos en el intervalo $[0, 2\pi]$ donde $f(x) = x + \sin(x)$ tiene tangente horizontal.
Solución: Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = 1 + \cos(x) = 0 \implies \cos(x) = -1$$

En el intervalo $[0, 2\pi]$, el coseno vale -1 únicamente en $x = \pi$. Calculamos la coordenada Y: $f(\pi) = \pi + \sin(\pi) = \pi + 0 = \pi$. El punto de tangente horizontal es (π, π).

PROFE TEO
Las tangentes horizontales ocurren cuando $f'(x) = 0$. Como las funciones trigonométricas son periódicas, ¡tendrás infinitos puntos donde la pendiente es cero!

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Péndulo de Laboratorio

Contexto: La oscilación de un péndulo obedece a $\theta(t) = 0{,}5\sin(t)$ radianes. Calcule la velocidad angular instantánea del mecanismo cuando el cronómetro marque exactamente $\pi/3$ segundos.
Solución: Derivamos la posición angular: $\omega(t) = \theta'(t) = 0{,}5\cos(t)$. Evaluamos en $t = \pi/3$: $\omega(\pi/3) = 0{,}5\cos(\pi/3) = 0{,}5(0{,}5) = 0{,}25$. **Respuesta:** La velocidad angular es 0,25 rad/s.

Aplicación 2: Corriente Alterna

Contexto: El voltaje de un circuito eléctrico varía según $V(t) = 120\cos(t)$. Determine la tasa de variación instantánea del voltaje transmitido en el instante $t = \pi/2$.
Solución: Derivamos el voltaje: $V'(t) = -120\sin(t)$. Evaluamos: $V'(\pi/2) = -120\sin(\pi/2) = -120(1) = -120$. **Respuesta:** El voltaje decrece a 120 voltios por segundo.

PROFE TEO
En física vibratoria, la derivada de la posición $\sin(t)$ es $\cos(t)$. ¡Esto demuestra que la velocidad está desfasada exactamente 90 grados respecto a la posición!

Aplicación 3: Amortiguador Mecánico

Contexto: Un resorte helicoidal proyecta su centro de masa en posición $x(t) = t\sin(t)$ centímetros. Evalúe la velocidad del resorte al cumplirse π segundos de iniciar el movimiento.
Solución: Aplicamos regla del producto: $v(t) = (1)\sin(t) + t\cos(t)$. Evaluamos en $t = \pi$: $v(\pi) = \sin(\pi) + \pi\cos(\pi) = 0 + \pi(-1) = -\pi$. **Respuesta:** La velocidad instantánea de retracción es $-\pi$ cm/s.

Aplicación 4: Óptica y Refracción

Contexto: Un rayo láser incide sobre un polímero alterando su índice luminoso $L(\alpha) = \frac{\tan\alpha}{\alpha}$. Obtenga la tasa de variación refractiva óptica en el ángulo $\alpha = \pi/4$.
Solución: Derivamos por cociente: $L'(\alpha) = \frac{\alpha\sec^2\alpha - \tan\alpha}{\alpha^2}$. En $\pi/4$, $\sec^2(\pi/4) = 2$ y $\tan(\pi/4) = 1$. $L'(\pi/4) = \frac{(\pi/4)(2)-1}{(\pi/4)^2} = \frac{\pi/2-1}{\pi^2/16} = \frac{8\pi-16}{\pi^2}$.

Aplicación 5: Mareas Oceánicas

Contexto: El nivel del muelle en un puerto marítimo fluctúa rígidamente calculando $N(t) = 4 + 2\sec(t)$ metros. Halle el ritmo de incremento de la marea transcurridos $\pi/6$ minutos.
Solución: Derivamos: $N'(t) = 2\sec(t)\tan(t)$. Evaluamos: $N'(\pi/6) = 2(2/\sqrt{3})(1/\sqrt{3}) = 4/3$. **Respuesta:** La marea sube a 1,33 m/min.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Si el ángulo se midiera en grados en lugar de radianes, el límite $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$ no sería 1. Investigue y explique qué constante aparecería en la derivada del seno.
2. Visualice la gráfica de $\sin(x)$. Explique geométricamente por qué su derivada ($\cos x$) debe ser estrictamente cero en los puntos $\pi/2$ y $3\pi/2$.
3. Demuestre verbalmente, usando la definición de cociente y las derivadas básicas, por qué todas las co-funciones trigonométricas (cos, cot, csc) poseen signos negativos en sus derivadas.
4. Analice el patrón cíclico de las derivadas del seno y el coseno. Si le piden calcular la derivada número 100 de $\cos(x)$, ¿cuál es el resultado inmediato y por qué?
5. Un compañero afirma que la derivada de $\sin^2(x)$ es $\cos^2(x)$. Refute algebraicamente este error empleando la regla del producto para $f(x) = \sin x \cdot \sin x$.
6. ¿Qué condición geométrica en la curva $y = \tan x$ explica el hecho de que su derivada $y' = \sec^2 x$ sea siempre estrictamente positiva en su dominio?
7. Describa cómo el Teorema de Compresión (o Sándwich) es el pilar analítico fundamental para demostrar el límite notable $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.
8. Si la derivada de la posición vibratoria es cero, la aceleración se maximiza. Relacione este principio físico con las segundas derivadas del seno.
9. Si evaluamos la función $f(x) = \csc(x)$, la derivada presenta una asíntota en $x = 0$. Justifique este fallo derivativo usando la discontinuidad geométrica de la curva original.
10. Determine analíticamente si es posible que la gráfica de $y = \sin(x) + x^2$ posea alguna tangente perfectamente vertical en el conjunto de los números reales.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Derive $f(x) = x^3 \cos(x)$ utilizando la regla del producto.

Guía de Solución Interactiva

1. Factores: $u = x^3 \implies u' = \_\_\_\_\_$, y $v = \cos(x) \implies v' = \_\_\_\_\_\_\_$.
2. Estructura cruzada: $f'(x) = (\_\_\_\_\_)\cos(x) + (x^3)(\_\_\_\_\_\_\_)$.
3. Simplificamos ordenando los signos: $f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$.

Problema 2. Obtenga la derivada de la fracción trigonométrica $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Numerador y denominador: $u = \sin x \implies u' = \_\_\_\_\_$, $v = x \implies v' = \_\_\_\_\_$.
2. Aplicamos la regla del cociente: $g'(x) = \frac{(\_\_\_\_\_\_)(x) - (\sin x)(\_\_\_\_\_\_)}{x^2}$.
3. Agrupamos el resultado final: $g'(x) = \frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{x^2}$.

Problema 3. Demuestre la derivada de $y = \cot x$ transformándola a senos y cosenos.

Guía de Solución Interactiva

1. Identidad: $\cot x = \frac{\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_}$.
2. Regla del cociente: $y' = \frac{(-\sin x)(\_\_\_\_\_\_) - (\cos x)(\_\_\_\_\_\_)}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$.
3. Factorizamos el signo y usamos Pitágoras: $y' = \frac{-(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)}{\sin^2 x} = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

PROFE TEO

Las secantes y tangentes son primas hermanas en el cálculo. La derivada de la tangente incluye a la secante al cuadrado, y la de la secante multiplica ambas. ¡Aprende el patrón!

Problemas Generales Analíticos

Problema 4. Calcule la derivada de $f(x) = 5\sin x - 2\cos x$.

Problema 5. Determine la derivada por producto de $y = \tan(x)\sec(x)$.

Problema 6. Halle $f'(x)$ para la estructura fraccionaria $f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$.

Problema 7. Derive la función combinada $g(t) = t^2 \csc(t)$.

Problema 8. Calcule la segunda derivada y'' de la función $y = \sec x$.

Problema 9. Encuentre la pendiente de la recta tangente a $y = x\cos x$ en $x = \pi$.

Problema 10. Derive algebraicamente $h(\theta) = \frac{\cot\theta}{1-\sin\theta}$.

Problema 11. Determine los puntos donde $f(x) = \sqrt{3}x + 2\sin x$ tiene tangentes horizontales en $[0, 2\pi]$.

Problema 12. Halle y' simplificando al máximo para $y = (\sin x + \cos x)^2$.

Problema 13. Derive la función $f(x) = \frac{x^2 \tan x}{\sec x}$. (Sugerencia: identidades previas).

Problema 14. Halle la derivada 45º orden ($y^{(45)}$) de $y = \cos x$.

Problema 15. Calcule la derivada cruzada de $g(v) = v^3 \cos v \sin v$.

Problema 16. Resuelva el cociente avanzado $f(x) = \frac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x}$.

Problema 17. Determine la ecuación de la recta tangente a $y = \sin x$ en el origen.

Problema 18. Calcule $h'(x)$ para la expresión $h(x) = x^4 + \cot x - x \csc x$.

Problema 19. Pruebe si la función $f(x) = |\sin x|$ es derivable en $x = \pi$.

Problema 20. Halle la segunda derivada en $x = \pi/4$ para $y = \tan x$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un radar aeronáutico rota barriendo un ángulo interceptor de $A(t) = 2\sin(t)$. Determine analíticamente la velocidad angular generada al cumplirse π segundos.

Guía de Solución Interactiva

1. Derivamos la función de posición angular: $A'(t) =$ __________. 2. Sustituimos el tiempo límite π en la derivada: $A'(\pi) = 2\cos($_____$)$. 3. Sabiendo que $\cos(\pi) = -1$, la velocidad angular resulta _______ rad/s.

Problema 2. La corriente de un campo magnético fluctúa marcando $I(t) = t^2\cos(t)$ amperios. Evalúe la tasa instantánea de cambio eléctrico en $t = \pi/2$ segundos.

Guía de Solución Interactiva

1. Aplicamos producto: $I'(t) =$ _______ $\cos(t) - t^2$ _______. 2. En $t = \pi/2$, el término con coseno se anula porque vale _____. 3. Sustituimos en el término restante obteniendo una tasa de __________ A/s.

Problema 3. La altitud de un dron evasivo sigue el patrón $H(t) = \frac{\tan(t)}{t}$ metros. Calcule su tasa de velocidad vertical en el cuarto de π.

Guía de Solución Interactiva

1. Regla de división: $H'(t) = \frac{t(\_\_\_\_\_\_\_\_) - \tan(t)(\_\_\_\_\_\_)}{t^2}$. 2. Evaluamos en $\pi/4$: $\sec^2(\pi/4) =$ _____ y $\tan(\pi/4) =$ _____. 3. La velocidad de ascenso vertical da como valor final _______________ m/s.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La onda acústica de un diapasón comprime partículas a presión $P(t) = 5\cos(t) - 2\sin(t)$. Halle el gradiente de presión sonora en $t = \pi$.

Problema 5. El vector térmico de un disipador oscila midiendo $T(x) = x\tan(x)$ Celsius. Especifique el ritmo calórico instantáneo absorbiendo energía al cruzar el radián $\pi/4$.

Problema 6. La refracción lumínica en fibra óptica pierde intensidad por $I(\theta) = \sec(\theta)\csc(\theta)$. Calcule la tasa de atenuación fotónica en la inclinación de ángulo $\pi/3$.

Problema 7. El spin cuántico de un electrón confinado vibra según la superposición probabilística $S(t) = \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}$. Determine la variación del estado espinorial en $t = \pi/2$.

Problema 8. El vórtice de una turbina eólica expande su diámetro fluido $V(r) = r^2\cot(r)$. Analice la velocidad de compresión de las palas en radianes $r = \pi/2$.

Problema 9. El émbolo de un pistón hidráulico empuja combustible linealmente marcando $E(t) = t^3\sin(t)$. Precise la aceleración volumétrica (segunda derivada) del cilindro en el origen.

Problema 10. La réplica de un temblor tectónico proyecta oscilación cortical $O(t) = \frac{t}{\sec(t)}$. Encuentre la velocidad sísmica del terreno exactamente al completarse un ciclo de 2π.

Problema 11. El espejo oscilante de un escáner láser calibra trayectoria dictando $L(\alpha) = \cos^2(\alpha)$. Valide analíticamente la aceleración de barrido fotónico angular centrado en $\pi/4$.

Problema 12. La atracción gravitatoria de un cometa hiperbólico perturba órbitas por $G(t) = \sin(t) - t\cos(t)$. Precise la anomalía gravitacional de empuje evaluada a los π segundos.

Problema 13. La radiación solar impactando células fotovoltaicas decae asimétricamente según $R(\theta) = \frac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. Cuantifique la tasa de pérdida energética en inclinación cénit de $\pi/6$.

Problema 14. La resonancia estructural de un puente colgante azota cables registrando fuerza $F(v) = v^2 \sec(v)$. Determine el factor de fatiga de tensión cruzando velocidad vibratoria cero.

Problema 15. El pulso de un marcapasos cardíaco inyecta milivoltios al miocardio bajo modelo $P(t) = \csc(t) + \cot(t)$. Detecte el gradiente de shock eléctrico desfasado a $\pi/2$.

Problema 16. La fricción molecular de neumáticos sobre asfalto se disipa registrando calor $Q(x) = \frac{x^2 \sin(x)}{\tan(x)}$. Defina la tasa de calentamiento instantáneo caucho-suelo barriendo un radián.

Problema 17. Un satélite meteorológico mapea huracanes escaneando latitud $M(\alpha) = \alpha\cos(\alpha)\cot(\alpha)$. Establezca el vector de rotación ciclónica al cruzar la banda polar norte de $\pi/4$.

Problema 18. La apertura de diafragma en una lente telescópica varía luz con $A(t) = \frac{\tan(t)}{t^2}$. Certifique el ratio de exposición estelar ajustado fotográficamente en tiempo $\pi/4$.

Problema 19. La compresión de datos de video renderizado satura memoria virtual RAM dictando $D(b) = b^3 \csc(b)$. Analice la velocidad límite de estrangulamiento de bits evaluando $b = \pi/2$.

Problema 20. El flujo aerodinámico rompiendo en alas delta supersónicas altera resistencia midiendo $F(w) = \sin^3(w)\cos(w)$. Diagnostique la tasa de turbulencia límite franqueando rasante de $\pi/4$.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $3x^2 \cos x - x^3 \sin x$.
2. $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.
3. $-\csc^2 x$.
4. $5 \cos x + 2 \sin x$.
5. $\sec x \tan^2 x + \sec^3 x$.
6. $\sec x \tan x + \sec^2 x$.
7. $2t \csc t - t^2 \csc t \cot t$.
8. $\sec x \tan^2 x + \sec^3 x$.
9. $m = -1$.
10. $\frac{-\csc^2 \theta(1-\sin\theta)+\cot\theta\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2}$.
11. $x = 5\pi/6, 7\pi/6$.
12. $2\cos(2x)$.
13. $x^2 \cos x + 2x \sin x$.
14. $-\sin x$.
15. $\frac{v^2}{2}[3\sin(2v) + 2v\cos(2v)]$.
16. $\frac{-2\sec x(\sec x - \tan x)}{(\sec x + \tan x)^2}$.
17. $y = x$.
18. $4x^3 - \csc^2 x - \csc x + x \csc x \cot x$.
19. No es derivable (Pto. anguloso).
20. 4.

Propuestos de Aplicación

1. -2 rad/s.
2. $-\pi^2/4$ A/s.
3. $\frac{2\pi-16}{\pi^2}$ m/s.
4. 2 unidades.
5. $1 + \pi/2$ C/rad.
6. $-16/9$ fotones/rad.
7. 1 estado/s.
8. $-\pi^2/4$ velocidad/rad.
9. 0 acel. vol.
10. 1 velocidad sísmica.
11. -2 acel. angular.
12. $-\pi$ unidades gravit.
13. -1 ratio/rad.
14. 0 factor fatiga.
15. -1 mV/s.
16. $2\cos(1) - \sin(1)$ calor.
17. $\frac{\pi-4-2\pi}{8}$ vector.
18. $\frac{16\pi-64}{\pi^3}$ ratio.
19. $3\pi^2/4$ bits/s.
20. $-1/4$ turbulencia/rad.

$\omega(t)$

¡Frecuencia Dominada!

'La vida imita a las funciones trigonométricas: tiene crestas de éxito y valles de aprendizaje, todos repitiéndose en ciclos constantes. Entender la derivada te da el poder de predecir a qué velocidad subirás en tu próxima oscilación.'

- La dinámica de los ciclos infinitos

¡Felicidades! Has dominado la base matemática que rige la luz, el sonido y la rotación del universo.

$\pi/2$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com