

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

**DERIVADAS**

**EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS**

CUADERNO DE TRABAJO  
El número  $e$  y el logaritmo natural

$$d \ln(a)u$$

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x}$$

## Teoría: Las Funciones Trascendentes

En matemáticas superiores, no todo es un polinomio. La naturaleza crece y decrece a ritmos proporcionales a su tamaño actual. Para modelar esto, necesitamos funciones que sean sus propias derivadas. Entra en escena el majestuoso número de Euler,  $e \approx 2,71828$ .

### 1. Derivada de la Función Exponencial

La derivada de la función exponencial natural  $f(x) = e^x$  es ella misma. Si la función tiene una base distinta  $a > 0$ , se multiplica por el logaritmo natural de la base. Por la regla de la cadena, si el exponente es una función  $u(x)$ , multiplicamos por  $u'(x)$ :

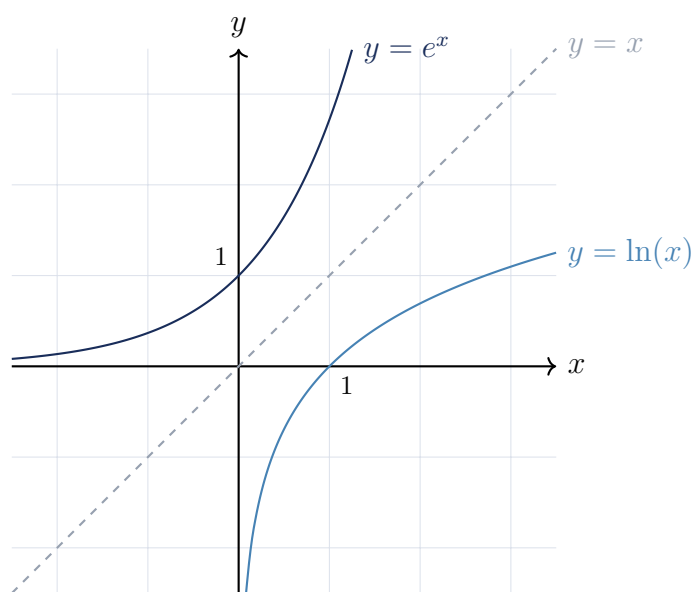
$$\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \cdot u' \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[a^u] = a^u \ln(a) \cdot u'$$

### 2. Derivada de la Función Logarítmica

La función logaritmo natural  $y = \ln(x)$  es la inversa de  $e^x$ . Su derivada nos da una función algebraica racional. Para cualquier base  $a$ , se divide por  $\ln(a)$ . Con regla de la cadena para un argumento  $u(x)$ :

$$\frac{d}{dx}[\ln(u)] = \frac{u'}{u} \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}[\log_a(u)] = \frac{u'}{u \ln(a)}$$

A menudo, es mucho más fácil aplicar las propiedades de los logaritmos antes de derivar:  $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ ,  $\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ , y  $\ln(a^n) = n \ln(a)$ .



....>

#### PROFE TEO

La función  $e^x$  es la única función (salvo multiplicada por una constante) cuya tasa de crecimiento instantáneo es exactamente igual a su valor actual. Es inmune al operador derivada.

....>

#### PROFE TEO

¡Un error letal de examen! Derivar  $\ln(x^3)$  como  $\frac{1}{x^3}$ . ¡Falta la cadena! Lo correcto es  $\frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$ . Mejor aún, baja el 3 por propiedades de logaritmos antes de derivar.

### 3. Diferenciación Logarítmica

Cuando tienes una función elevada a otra función, como  $y = x^x$ , las reglas normales fallan. Debes tomar  $\ln()$  a ambos lados, bajar el exponente y derivar implícitamente:  $\ln(y) = x \ln(x) \implies \frac{y'}{y} =$  derivada del producto.

## Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: Exponencial Compuesta

**Enunciado:** Calcule la derivada de  $y = e^{4x^3-5x}$ . **Solución:** Identificamos el exponente  $u = 4x^3 - 5x$ . Su derivada es  $u' = 12x^2 - 5$ . Aplicamos la regla  $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u \cdot u'$ .

$$y' = e^{4x^3-5x} \cdot (12x^2 - 5)$$

**Respuesta:**  $y' = (12x^2 - 5)e^{4x^3-5x}$ .

### Problema Resuelto 2: Regla del Producto con Logaritmo

**Enunciado:** Obtenga  $f'(x)$  si  $f(x) = x^4 \ln(x)$ . **Solución:** Usamos la regla del producto:  $[u \cdot v]' = u'v + uv'$ . Aquí  $u = x^4 \implies u' = 4x^3$ , y  $v = \ln(x) \implies v' = \frac{1}{x}$ .

$$f'(x) = (4x^3) \ln(x) + (x^4) \left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 4x^3 \ln(x) + x^3$$

Factorizando  $x^3$ : **Respuesta:**  $f'(x) = x^3(4 \ln(x) + 1)$ .

### Problema Resuelto 3: Diferenciación Logarítmica

**Enunciado:** Derive la función  $y = x^{\sin x}$ . **Solución:** Como hay variable en la base y en el exponente, aplicamos logaritmo natural:

$$\ln(y) = \ln(x^{\sin x}) \implies \ln(y) = \sin(x) \cdot \ln(x)$$

Derivamos implícitamente respecto a  $x$ :

$$\frac{y'}{y} = \cos(x) \ln(x) + \sin(x) \left(\frac{1}{x}\right)$$

Despejamos  $y'$  multiplicando todo por  $y$  (sustituyendo el valor original de  $y$ ):

**Respuesta:**  $y' = x^{\sin x} \left[ \cos(x) \ln(x) + \frac{\sin x}{x} \right]$ .

....▷

### PROFE TEO

Siempre ordena tu resultado final poniendo los polinomios algebraicos antes que la función exponencial  $e^x$ . Evita confusiones visuales sobre qué está en el exponente.

**Problema Resuelto 4: Base Numérica Diferente de  $e$** 

**Enunciado:** Halle la derivada de  $y = 7^{\sqrt{x}}$ . **Solución:** La función es de la forma  $a^u$ , con  $a = 7$  y  $u = x^{1/2}$ . La fórmula es  $y' = a^u \ln(a) \cdot u'$ . Derivamos el exponente:  $u' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

$$y' = 7^{\sqrt{x}} \cdot \ln(7) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Respuesta:**  $y' = \frac{7^{\sqrt{x}} \ln(7)}{2\sqrt{x}}$ .

**Problema Resuelto 5: Propiedades del Logaritmo Previas a Derivar**

**Enunciado:** Derive la función  $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}\right)$ . **Solución:** Aplicamos propiedades: la raíz es potencia  $1/2$ , que baja multiplicando. La división se vuelve resta.

$$f(x) = \frac{1}{2} [\ln(x+2) - \ln(x-2)]$$

Ahora derivamos cada término de forma muy sencilla:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \right]$$

Homogenizamos:  $\frac{x-2-(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{-4}{x^2-4}$ . Multiplicado por  $1/2$ : **Respuesta:**  $f'(x) = \frac{-2}{x^2-4}$ .

....▷

**PROFE TEO**

Antes de aplicar la regla de la cadena a  $\ln$  con raíces o fracciones enormes, USA PROPIEDADES. Te ahorrará páginas enteras de cálculos algebraicos innecesarios y propensos a error.

## Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Desintegración Isotópica

**Contexto:** La masa de un isótopo radiactivo decae según  $M(t) = 50e^{-0,04t}$  gramos, donde el tiempo opera en años. Determine la velocidad de desintegración exacta al alcanzar el décimo año en el reactor analítico.

**Solución:** Derivamos:  $M'(t) = 50e^{-0,04t} \cdot (-0,04) = -2e^{-0,04t}$ . Evaluamos en  $t = 10$ :  $M'(10) = -2e^{-0,4}$ . **Respuesta:** Se desintegra a  $2e^{-0,4}$  g/año.

### Aplicación 2: Crecimiento Biológico

**Contexto:** Un cultivo bacteriano se expande modelado por  $P(t) = 2000e^{0,15t}$  individuos por hora. Cuantifique el ritmo de reproducción instantánea del sistema microscópico en el quinto periodo de incubación térmica continua.

**Solución:** Derivamos la población:  $P'(t) = 2000(0,15)e^{0,15t} = 300e^{0,15t}$ . Sustituimos  $t = 5$ :  $P'(5) = 300e^{0,75}$ . **Respuesta:** Crece a  $300e^{0,75}$  bacterias/hora.

### Aplicación 3: Capitalización Continua

**Contexto:** Una cartera de inversión financiera acumula valor proyectando  $V(t) = 15000e^{0,08t}$  dólares mensuales. Halle la tasa de rendimiento monetario marginal que percibe la cuenta durante el vigésimo mes de retención bursátil.

**Solución:** Derivando el capital:  $V'(t) = 15000(0,08)e^{0,08t} = 1200e^{0,08t}$ . Evaluando con  $t = 20$ :  $V'(20) = 1200e^{1,6}$ . **Respuesta:** Gana  $1200e^{1,6}$  dólares/mes.

### Aplicación 4: Presión Barométrica

**Contexto:** La presión atmosférica estratosférica cae logarítmicamente según la altitud  $h$  mediante  $p(h) = 101,3e^{-0,12h}$  kilopascales por kilómetro. Evalúe el gradiente de despresurización absoluto que soporta un globo sonda cruzando doce kilómetros verticales.

**Solución:** Derivamos la presión:  $p'(h) = 101,3(-0,12)e^{-0,12h} = -12,156e^{-0,12h}$ . Con  $h = 12$ :  $p'(12) = -12,156e^{-1,44}$ . **Respuesta:** Cae  $12,156e^{-1,44}$  kPa/km.

### Aplicación 5: Choque Térmico

**Contexto:** Un lingote metálico al rojo vivo se enfría modelando su temperatura mediante la ley de Newton  $T(m) = 25 + 800e^{-0,3m}$  Celsius por minuto. Obtenga la velocidad de disipación calórica tras tres minutos precisos.

**Solución:** Derivamos la ecuación térmica:  $T'(m) = 0 + 800(-0,3)e^{-0,3m} = -240e^{-0,3m}$ . Evaluamos en  $m = 3$ :  $T'(3) = -240e^{-0,9}$ . **Respuesta:** Se enfría a  $240e^{-0,9}$  °C/min.

....▷

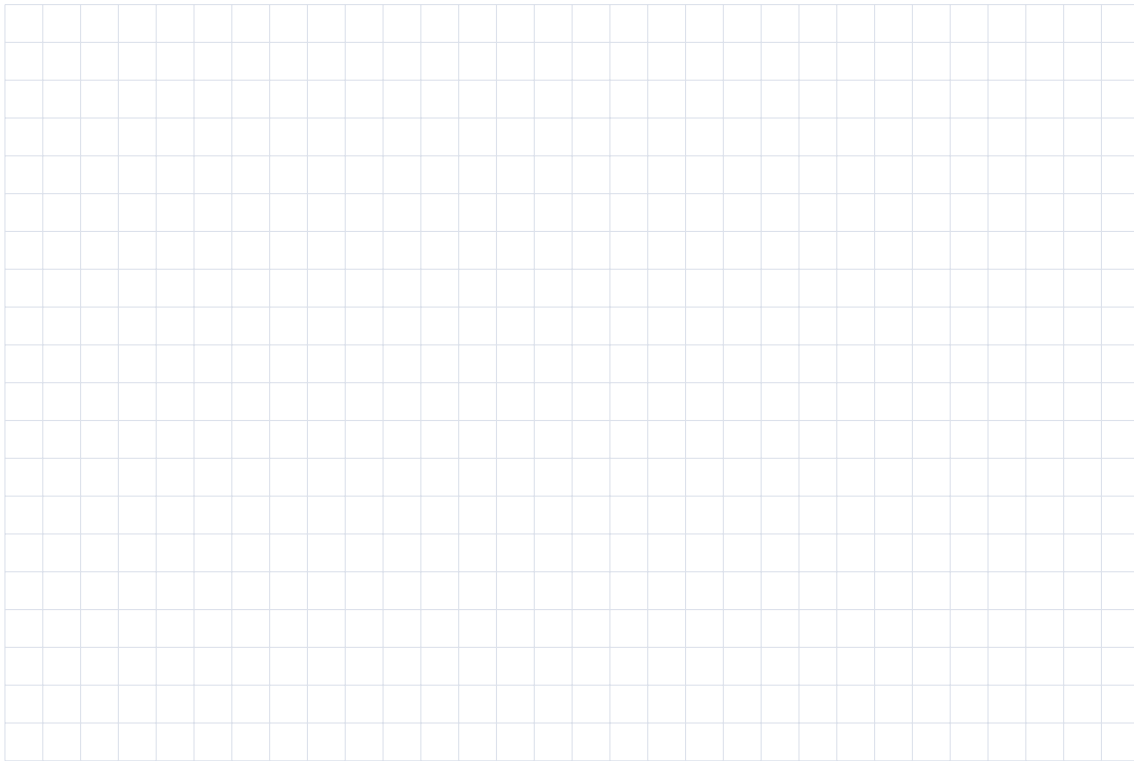
### PROFE TEO

Las finanzas avanzadas usan composición continua. El dinero no se suma al final de año o mes, crece de forma ininterrumpida instante a instante mediante la función  $e^{rt}$ .

## Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico, analítico o gráfico.

1. Analice el misterio matemático de por qué la función  $e^x$  es la única cuya pendiente geométrica en cualquier punto de su curva es numéricamente igual a la altura de la curva en ese mismo punto.
2. Justifique algebraicamente por qué derivar  $\ln(5x)$  arroja exactamente el mismo resultado que derivar  $\ln(x)$ . ¿Qué propiedad de los logaritmos anula el factor 5 durante la derivación?
3. Evalúe el dominio de la función  $f(x) = \ln(x)$ . Aunque su derivada  $1/x$  existe para valores negativos, explique por qué no podemos trazar tangentes reales para  $x < 0$  en la función original.
4. Un compañero deriva la función exponencial  $y = 3^x$  usando la regla de potencias respondiendo  $x3^{x-1}$ . Corrija este error común argumentando la diferencia fundamental entre una variable en la base y una en el exponente.
5. Demuestre paso a paso usando la diferenciación logarítmica que la derivada del producto de tres funciones  $y = u(x)v(x)w(x)$  se expande armoniosamente en una suma de tres términos proporcionales.
6. Analice el límite de la pendiente de la recta tangente a  $y = \ln(x)$  cuando  $x$  se aproxima fuertemente a cero por la derecha. ¿Qué significa este comportamiento geométricamente?
7. Compare el nivel de esfuerzo algebraico entre derivar  $y = \ln((x^2 + 1)^5)$  usando la regla de la cadena directamente, versus bajar el exponente con propiedades antes de derivar.
8. Considere la curiosa función  $f(x) = x^{1/x}$ . Explique por qué la diferenciación logarítmica es la única ruta legal en el cálculo real para obtener la pendiente analítica de esta curva.
9. Si  $y = e^{-x^2}$ , la campana de Gauss. Deduzca igualando la primera derivada a cero dónde se encuentra el pico máximo de probabilidad y por qué la exponencial nunca toca el eje horizontal.
10. Argumente lógicamente por qué la segunda derivada de  $y = e^{kx}$  siempre conservará el mismo signo que la función original, asumiendo  $k$  como una constante real no nula.

















## Claves de Respuestas

### Propuestos Matemáticos

1.  $(14x - 3)e^{7x^2 - 3x}$ .
2.  $4x^3/(x^4 + 1)$ .
3.  $x^{\ln x}[2 \ln(x)/x]$ .
4.  $3 \cos(3x)e^{\sin(3x)}$ .
5.  $5^{x^2 - 4x} \ln(5)(2x - 4)$ .
6.  $2xe^{4x}(2x + 1)$ .
7.  $12x^2/(x^3 + 1)$ .
8.  $-\tan(x)$ .
9.  $m = 4$ .
10.  $e^t(t^2 - 2t + 1)/(t^2 + 1)^2$ .
11.  $(e^{-1/2}, -1/(2e))$ .
12.  $e^{x \ln x}(\ln x + 1)$ .
13.  $\sec^2(x)/(\tan(x) \ln 3)$ .
14.  $-1/(1 - x^2)$ .
15.  $e^{-x}(x - 2)$ .
16.  $(\sin x)^x(\ln(\sin x) + x \cot x)$ .
17.  $\frac{we^{\sqrt{w^2+1}}}{\sqrt{w^2+1}}$ .
18.  $1/(x \ln x \ln(\ln x))$ .
19.  $(e^x + e^{-x})/2$  (Demostrado).
20. 0 (ya que  $(1 - \ln e)/e^2 = 0$ ).

### Propuestos de Aplicación

1.  $200e^6$  nodos/ms.
2.  $-3e^{-1} \approx -1,10$  V/s.
3.  $16/17 \approx 0,94$  moléc/mol.
4.  $-100e^{-2}$  lum/m.
5.  $28/30 = 14/15$  mm/km.
6.  $-60e^{-1}$  dB/cm.
7.  $-36e^{-4}$  mg/h.
8.  $-100e^{-1}$  ton/s.
9.  $\frac{1000e^{-2}}{(1+5e^{-2})^2}$  inf/día.
10.  $2/8 = 1/4$  unidad/ciclo.
11.  $-2\pi e^{-\pi^2}$  presión/u.
12.  $500/35 = 100/7$  b/lustro.
13.  $-1,5e^{-0,18}$  cent/mes.
14. 0 tox/f (derivada evaluada en e).
15.  $-(e^{0,01}/10000)$  poise/°C.
16.  $-10^{0,3} \ln(10)(0,1)$  desgaste.
17. 0 A/s (derivada en 0.5 es cero).
18.  $-1/20 = -0,05$  efic/año.
19.  $-20e^{-4}$  mitosis/mg.
20.  $4^2(\frac{\ln 4}{4} + \frac{1}{2})$  desv/siglo.



## ¡El Crecimiento Continuo!

'La función exponencial es inmune a las adversidades del cálculo diferencial. No importa cuántas veces intentes derivarla o reducirla, siempre emerge intacta, creciendo a su propio ritmo constante e inquebrantable. Sé tú también como el número  $e$ : resiliente ante las operaciones de la vida.'

- La regla universal del avance analítico

¡Enhorabuena! Has dominado el núcleo del modelado natural en toda la matemática trascendente.

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

$e$