

$\frac{d}{dx}[u^2] = 2uu'$

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

$\frac{F_x}{F_y}$

# DERIVACIÓN IMPLÍCITA

CUADERNO DE TRABAJO  
Técnica para hallar  $y'$  en ecuaciones  
complejas

$x^2 + y^2 = r^2$

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

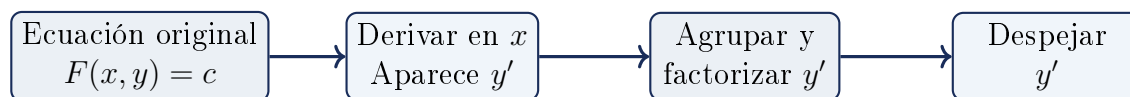
## Teoría: Derivando sin Despejar

Hasta ahora hemos trabajado con funciones expresadas explícitamente en la forma  $y = f(x)$ . Sin embargo, en matemáticas y geometría, muchas curvas importantes como circunferencias ( $x^2 + y^2 = 25$ ) o folios ( $x^3 + y^3 = 6xy$ ) no están despejadas para  $y$ .

La derivación implícita nos permite encontrar la pendiente de la recta tangente  $y'$  o  $\frac{dy}{dx}$  derivando ambos lados de la ecuación tal como están, reconociendo que  $y$  es una función oculta (implícita) que depende de  $x$ .

### Pasos para la Derivación Implícita

- 1. Derivar a ambos lados:** Derive ambos miembros de la ecuación con respecto a  $x$ .
- 2. Aplicar la regla de la cadena:** Cada vez que derive una expresión que contenga  $y$ , multiplique su derivada convencional por  $y'$  (o  $\frac{dy}{dx}$ ).
- 3. Agrupar:** Agrupe todos los términos que contengan  $y'$  en el lado izquierdo de la ecuación y envíe los demás al lado derecho.
- 4. Factorizar y Despejar:** Factorice  $y'$  en el lado izquierdo y divídalo entre el factor restante para aislar  $y'$ .



## Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: La Circunferencia Básica

**Enunciado:** Halle  $\frac{dy}{dx}$  para la ecuación  $x^2 + y^2 = 25$ .

**Solución:** Derivamos ambos lados respecto a  $x$ :

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

Aplicando la regla de la cadena al término  $y^2$ :

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

Despejamos  $y'$ :

$$2y \cdot y' = -2x \implies y' = \frac{-2x}{2y}$$

**Respuesta:**  $y' = -\frac{x}{y}$ .

.... ▷

### PROFE TEO

¡Ojo aquí! Intentar despejar  $y$  en  $x^3 + y^3 = 6xy$  es una pesadilla algebraica. La derivación implícita es tu atajo maestro para no sufrir.

.... ▷

### PROFE TEO

El error clásico de examen: derivar  $y^2$  como  $2y$  y olvidarse de poner  $y'$ . Recuerda: estás derivando respecto a  $x$ , por lo tanto, la regla de la cadena es obligatoria:  $\frac{d}{dx}[y^2] = 2y \cdot y'$ .

.....▷

**PROFE TEO**

¡Atención a la regla del producto! Cuando veas  $xy$ , es el producto de dos funciones.

Derivada del primero por el segundo más el primero por la derivada del segundo:  $(1)y + x(y')$ .

**Problema Resuelto 2: Producto de Variables**

**Enunciado:** Obtenga  $y'$  de la curva  $x^3 + xy - y^2 = 4$ .

**Solución:** Derivamos término a término respecto a  $x$ . Ojo con el producto  $xy$ :

$$3x^2 + [(1)y + x(y')] - 2y(y') = 0$$

Agrupamos los términos con  $y'$  a la izquierda:

$$xy' - 2yy' = -3x^2 - y$$

Factorizamos  $y'$ :

$$y'(x - 2y) = -3x^2 - y$$

**Respuesta:**  $y' = \frac{-3x^2 - y}{x - 2y}$ .

**Problema Resuelto 3: Argumentos Compuestos**

**Enunciado:** Determine  $\frac{dy}{dx}$  si  $\sin(xy) = x^2 - y$ .

**Solución:** Aplicamos la regla de la cadena al seno y usamos la regla del producto en su argumento:

$$\cos(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy) = 2x - y'$$

$$\cos(xy) \cdot (y + xy') = 2x - y'$$

Distribuimos el coseno:

$$y \cos(xy) + xy' \cos(xy) = 2x - y'$$

Agrupamos los  $y'$ :

$$xy' \cos(xy) + y' = 2x - y \cos(xy)$$

$$y'[x \cos(xy) + 1] = 2x - y \cos(xy)$$

**Respuesta:**  $y' = \frac{2x - y \cos(xy)}{x \cos(xy) + 1}$ .

**Problema Resuelto 4: Trascendentes Mixtas****Enunciado:** Halle  $y'$  para  $e^y + \ln(xy) = x$ .**Solución:** Derivamos ambos miembros. Al logaritmo le aplicamos su propiedad o derivamos por regla de la cadena:

$$e^y \cdot y' + \frac{1}{xy}(y + xy') = 1$$

$$e^y y' + \frac{1}{x} + \frac{y'}{y} = 1$$

Multiplicamos todo por  $xy$  (o despejamos directamente los términos con  $y'$ ):

$$y' \left( e^y + \frac{1}{y} \right) = 1 - \frac{1}{x}$$

Multiplicando num y den por sus denominadores:

$$y' \left( \frac{ye^y + 1}{y} \right) = \frac{x - 1}{x}$$

**Respuesta:**  $y' = \frac{y(x-1)}{x(ye^y+1)}$ .**Problema Resuelto 5: Segunda Derivada Implícita****Enunciado:** Halle  $y''$  simplificada para la hipérbola  $x^2 - y^2 = 16$ .**Solución:** Primero obtenemos  $y'$ :

$$2x - 2yy' = 0 \implies y' = \frac{x}{y}$$

Ahora derivamos  $y'$  aplicando la regla del cociente para obtener  $y''$ :

$$y'' = \frac{(1)(y) - (x)(y')}{y^2}$$

Sustituimos  $y' = \frac{x}{y}$  dentro de la segunda derivada:

$$y'' = \frac{y - x \left( \frac{x}{y} \right)}{y^2} = \frac{\frac{y^2 - x^2}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3}$$

De la ecuación original, sabemos que  $y^2 - x^2 = -16$ . Sustituimos esto: **Respuesta:**  $y'' = -\frac{16}{y^3}$ .

.....▷

**PROFE TEO**

En las segundas derivadas implícitas ( $y''$ ), derivas tu  $y'$  y siempre te quedará otra  $y'$  colgando. Al final, debes sustituir la  $y'$  original que hallaste en el primer paso.

## Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Expansión Termodinámica

**Contexto:** Un entorno adiabático presenta presiones y volúmenes vinculados mediante  $PV^{1,4} = K$ . Determine la tasa de variación de la presión respecto al volumen cuando el gas se comprime sin despejar ecuaciones explícitas, evaluando su comportamiento estructural diferencial.

**Solución:** Derivando con regla del producto respecto a  $V$ :  $\frac{dP}{dV}V^{1,4} + P(1,4V^{0,4}) = 0$ . Despejando:  $\frac{dP}{dV} = -\frac{1,4P \cdot V^{0,4}}{V^{1,4}}$ . **Respuesta:**  $\frac{dP}{dV} = -1,4\frac{P}{V}$ .

### Aplicación 2: Ingeniería Óptica

**Contexto:** La ecuación de lentes delgadas vincula distancia de imagen, objeto y foco constante:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ . Halle el ritmo de ajuste de la imagen respecto al objeto modelando la alteración visual focal.

**Solución:** Derivamos ambos lados respecto a  $p$ :  $-p^{-2} - q^{-2}\frac{dq}{dp} = 0$ . Despejando el término derivado:  $q^{-2}\frac{dq}{dp} = -p^{-2}$ . **Respuesta:**  $\frac{dq}{dp} = -\left(\frac{q}{p}\right)^2$ .

### Aplicación 3: Economía de Producción

**Contexto:** El nivel productivo constante acata la curva iso-cuanta de capital y labor  $10K^{0,6}L^{0,4} = 5000$ . Calcule el gradiente marginal de sustitución técnica, derivando el capital respecto a la labor de forma implícita.

**Solución:** Derivando respecto a  $L$ :  $10[0,6K^{-0,4}\frac{dK}{dL}L^{0,4} + K^{0,6}(0,4L^{-0,6})] = 0$ . Simplificando potencias:  $6\frac{L^{0,4}}{K^{0,4}}\frac{dK}{dL} + 4\frac{K^{0,6}}{L^{0,6}} = 0$ . **Respuesta:**  $\frac{dK}{dL} = -\frac{2K}{3L}$ .

### Aplicación 4: Curvatura Aerodinámica

**Contexto:** El contorno transversal de un ala furtiva se define implícitamente por el elipsoide modificado  $4x^2 - xy + 2y^2 = 100$ . Obtenga la inclinación tangente geométrica para soldar sensores de flujo turbulento estructural.

**Solución:** Derivamos la curva respecto a  $x$ :  $8x - (y + xy') + 4yy' = 0$ . Agrupamos  $y'$ :  $y'(4y - x) = y - 8x$ . **Respuesta:**  $y' = \frac{y-8x}{4y-x}$ .

### Aplicación 5: Dinámica de Crecimiento

**Contexto:** Una biocenosis microbiana interactúa simbióticamente manteniendo sus poblaciones iniciales bajo la trayectoria orbital  $\ln(xy) = x + y$ . Cuantifique la sensibilidad poblacional de fluctuación del primer organismo frente al segundo en equilibrio.

**Solución:** Derivamos respecto a  $x$ :  $\frac{y+xy'}{xy} = 1 + y'$ .  $\frac{1}{x} + \frac{y'}{y} = 1 + y'$ .  $y'(\frac{1}{y} - 1) = 1 - \frac{1}{x}$ . **Respuesta:**  $y' = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$ .

....▷

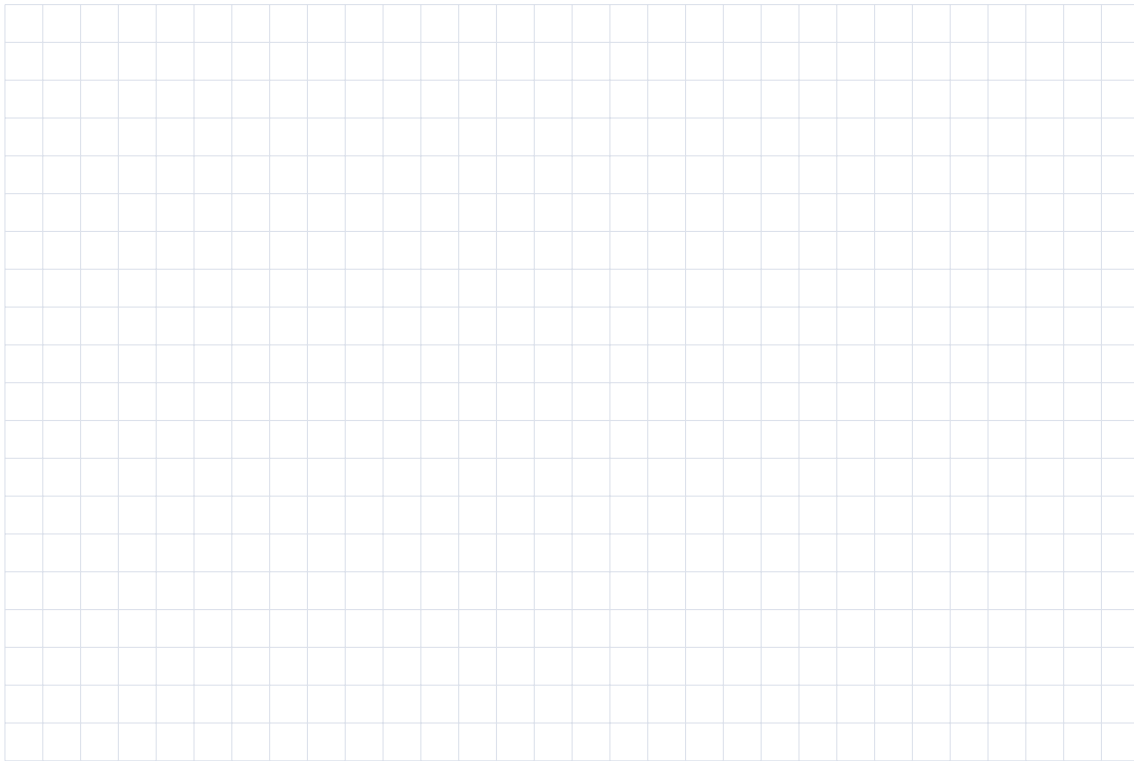
### PROFE TEO

Muchas fórmulas en física, como la de las lentes, son más fáciles de derivar usando exponentes negativos ( $p^{-1} + q^{-1} = f^{-1}$ ) en lugar de la molesta regla del cociente.

## Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Analice teóricamente por qué derivar  $y^3$  respecto a  $x$  arroja  $3y^2 \cdot y'$ , mientras que derivar  $x^3$  respecto a  $x$  simplemente produce  $3x^2$ . ¿Qué rol juega el diferencial en este proceso?
2. Suponga que la derivada implícita de una elipse resulta en una fracción donde el denominador se hace cero en ciertos puntos. ¿Qué significado geométrico estricto tienen estas singularidades evaluadas?
3. Compare el nivel de esfuerzo algebraico entre despejar  $y$  en  $y^2 + y = \ln x$  para luego derivar, versus aplicar derivación implícita directa. ¿Cuándo resulta matemáticamente imposible el primer camino?
4. Si la ecuación de una curva es simétrica respecto al origen, ¿su derivada implícita evaluada en un punto  $(a, b)$  preservará alguna simetría respecto al punto  $(-a, -b)$ ? Demuestre con  $x^2 + y^2 = r^2$ .
5. Un compañero estudiante argumenta que al derivar implícitamente  $xy = 1$ , él aísla  $y = x^{-1}$  antes. Justifique por qué ambas rutas deben arrojar el mismo valor analítico exacto al sustituir  $y$ .
6. Detalle el protocolo algebraico para encontrar la segunda derivada  $y''$  implícitamente. ¿Por qué es fundamental reciclar la primera derivada obtenida en el último paso algebraico?
7. Analice la ecuación  $\sin(x) + \cos(y) = 0$ . ¿Puede la derivación implícita predecir los intervalos de dominio y rango en los cuales la recta tangente carece de existencia real?
8. Evalúe el impacto de la regla del producto encadenado en funciones como  $x^2y^3$ . Redacte una advertencia para evitar el error más común que cometen los universitarios al enfrentar esta estructura.
9. Demuestre que las pendientes de dos curvas dadas por ecuaciones implícitas ortogonales como  $x^2 - y^2 = a$  y  $xy = b$  mantienen un producto igual a  $-1$  en sus puntos de intersección.
10. Al enfrentar curvas de grado superior como los folios de Descartes ( $x^3 + y^3 = 3axy$ ), determine cómo la derivada implícita ayuda a encontrar rizos, auto-intersecciones y asíntotas inclinadas teóricas.













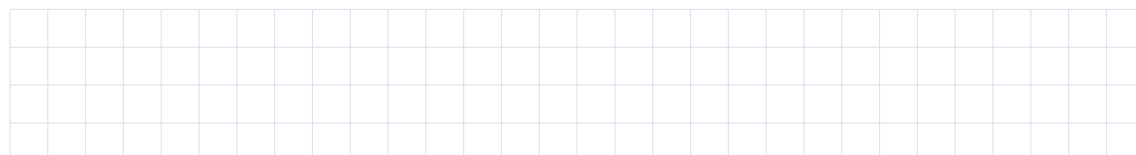




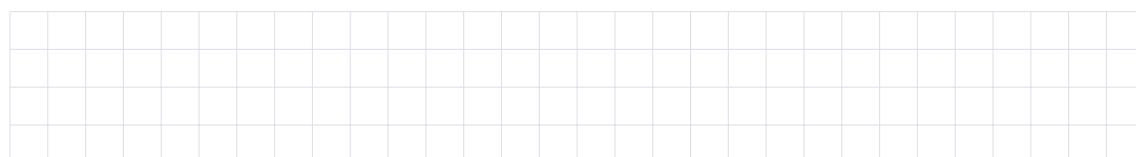
**Problema 17.** La biodisponibilidad farmacológica infunde plasma venoso donde la dosis satura la enzima hepática trazando  $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\arctan(y/x)}$ . Obtenga el pico de absorción metabólica instantánea.



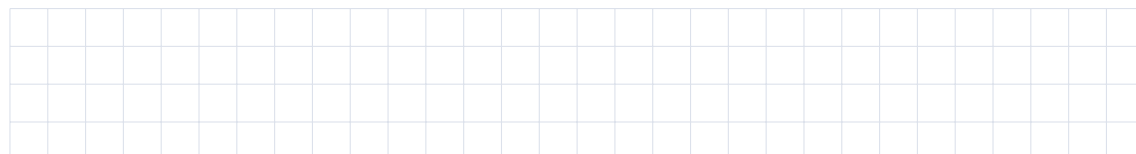
**Problema 18.** Un modelo ecológico depredador-presa exhibe órbitas cíclicas cerradas invariantes  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 + xy$ . Evalúe el declive de especies estimando el vector tangente de extinción biológica.



**Problema 19.** La función de onda probabilística cuántica envuelve átomos confinando estados ligados de partícula  $x^3 + 3x^2y - y^3 = 8$ . Prediga el nivel de incerteza geométrica saltando electrones de valencia.



**Problema 20.** La metalurgia forense traza la frontera de enfriamiento en metales fundidos endureciendo bajo el diagrama de fases  $y = x^y$ . Obtenga la gradiente de cristalización sólida molecular.



## Claves de Respuestas

### Propuestos Matemáticos

1.  $-2x/5y$ .
2.  $(5 - 3x^2y^2)/(2x^3y)$ .
3.  $(2x - ye^{xy})/(xe^{xy})$ .
4.  $(y - 2x)/(2y - x)$ .
5.  $(2 + 2xy^3)/(2y^3 - 3x^2y^2)$ .
6.  $\cos x / \sin y$ .
7.  $y/x - 2y/\sqrt{xy}$ .
8.  $\frac{\sec^2(x-y)}{\sec^2(x-y)+1}$ .
9.  $(x^2 + y^2 - x)/y$ .
10.  $-x/y$ .
11.  $y - 2\sqrt{2} = -(x - 2\sqrt{2})$ .
12.  $\frac{y \cos(xy) + e^y \sin x}{e^y \cos x - x \cos(xy)}$ .
13.  $\frac{x(1-x^2-y^2)}{y(1+x^2+y^2)}$ .
14.  $y/(x(y+1))$ .
15.  $-1/y^3$ .
16.  $\frac{\sqrt{1-x^2y^2}-y}{x}$ .
17.  $\frac{y(y-x \ln y)}{x(x-y \ln x)}$ .
18.  $\frac{y(x \ln y - y)}{x(y \ln x - x)}$ .
19.  $y - 3 = \frac{1}{3}(x + 1)$ .
20.  $-b^4/(a^2y^3)$ .

### Propuestos de Aplicación

1.  $-0,5$  pendiente elíptica.
2.  $(2x - y)/(x + 2y)$ .
3.  $1/(1 + \cos y)$ .
4.  $-(3x^2y + y^3)/(x^3 + 3xy^2)$ .
5.  $(y \sin(xy) - 2x)/(x \sin(xy))$ .
6.  $(2(x - y) - 1)/(2(x - y) + 1)$ .
7.  $y(3x - 1)/2x$ .
8.  $\frac{y(e^x - e^y)}{x(e^y - e^x)}$ .
9.  $\frac{2x - y^3}{3x^2 + y^4}$ .
10.  $(3x^2 - 4)/2y$ .
11.  $\frac{4y - x^3}{y^3 - 4x}$ .
12.  $-(y/x)^{3/5}$ .
13.  $\frac{\sin(y^2) - 2xy \cos(x^2)}{2xy \cos(y^2) - \sin(x^2)}$ .
14.  $\frac{y^2 - x^2 - y^2 - x^2}{y^2 + x^2 + x}$ .
15.  $\frac{2a(v-b) - v^3(p+a/v^2)}{v^3(v-b)}$ .
16.  $\frac{y(xe^x - y + 1)}{x(ye^x - y + 1)}$ .
17.  $\frac{x+y}{x-y}$ .
18.  $\frac{x/2 - y}{x - 2y/9}$ .
19.  $\frac{x^2 + 2xy}{y^2 - x^2}$ .
20.  $\frac{y^2}{x(1 - y \ln x)}$ .

## ¡La Incógnita Revelada!

'No todas las respuestas en la vida ni en la ciencia están despejadas y listas para usarse.

A veces, la variable que buscas está oculta, enredada entre otras. La verdadera habilidad geométrica radica en saber derivar la verdad de su entorno, paso a paso, hasta que su forma final emerja con total claridad.'

- La regla del orden implícito

¡Enhorabuena! Has perfeccionado una de las técnicas de navegación diferencial más elegantes y potentes de todo el análisis matemático.

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

*dy*