CÁLCULO DE UNA VARIABLE

# DERIVACIÓN IMPLÍCITA

## CUADERNO DE TRABAJO

**Técnica para hallar $y'$ en ecuaciones complejas**

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

# Teoría: Derivando sin Despejar

Hasta ahora hemos trabajado con funciones expresadas explícitamente en la forma $y = f(x)$. Sin embargo, en matemáticas y geometría, muchas curvas importantes como circunferencias ($x^2 + y^2 = 25$) o folios ($x^3 + y^3 = 6xy$) no están despejadas para $y$.

La derivación implícita nos permite encontrar la pendiente de la recta tangente $y'$ o $\frac{dy}{dx}$ derivando ambos lados de la ecuación tal como están, reconociendo que $y$ es una función oculta (implícita) que depende de $x$.

**PROFE TEO**

¡Ojo aquí! Intentar despejar $y$ en $x^3 + y^3 = 6xy$ es una pesadilla algebraica. La derivación implícita es tu atajo maestro para no sufrir.

## Pasos para la Derivación Implícita

1. **Derivar a ambos lados:** Derive ambos miembros de la ecuación con respecto a $x$.
2. **Aplicar la regla de la cadena:** Cada vez que derive una expresión que contenga $y$, multiplique su derivada convencional por $y'$ (o $\frac{dy}{dx}$).
3. **Agrupar:** Agrupe todos los términos que contengan $y'$ en el lado izquierdo de la ecuación y envíe los demás al lado derecho.
4. **Factorizar y Despejar:** Factorice $y'$ en el lado izquierdo y divídalo entre el factor restante para aislar $y'$.

Ecuación original $F(x, y) = c$ → Derivar en $x$ Aparece $y'$ → Agrupar y factorizar $y'$ → Despejar $y'$

**PROFE TEO**

El error clásico de examen: derivar $y^2$ como $2y$ y olvidarse de poner $y'$. Recuerda: estás derivando respecto a $x$, por lo tanto, la regla de la cadena es obligatoria: $\frac{d}{dx}[y^2] = 2y \cdot y'$.

# Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: La Circunferencia Básica

**Enunciado:** Halle $\frac{dy}{dx}$ para la ecuación $x^2 + y^2 = 25$.
**Solución:** Derivamos ambos lados respecto a $x$:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

Aplicando la regla de la cadena al término $y^2$:

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

Despejamos $y'$:

$$2y \cdot y' = -2x \implies y' = \frac{-2x}{2y}$$

**Respuesta:** $y' = -\frac{x}{y}$.

### Problema Resuelto 2: Producto de Variables

**Enunciado:** Obtenga $y'$ de la curva $x^3 + xy - y^2 = 4$.
**Solución:** Derivamos término a término respecto a $x$. Ojo con el producto $xy$:

$$3x^2 + [(1)y + x(y')] - 2y(y') = 0$$

Agrupamos los términos con $y'$ a la izquierda:

$$xy' - 2yy' = -3x^2 - y$$

Factorizamos $y'$:

$$y'(x - 2y) = -3x^2 - y$$

**Respuesta:** $y' = \frac{-3x^2-y}{x-2y}$.

### Problema Resuelto 3: Argumentos Compuestos

**Enunciado:** Determine $\frac{dy}{dx}$ si $\sin(xy) = x^2 - y$.
**Solución:** Aplicamos la regla de la cadena al seno y usamos la regla del producto en su argumento:

$$\cos(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy) = 2x - y'$$

$$\cos(xy) \cdot (y + xy') = 2x - y'$$

Distribuimos el coseno:

$$y\cos(xy) + xy'\cos(xy) = 2x - y'$$

Agrupamos los $y'$:

$$xy'\cos(xy) + y' = 2x - y\cos(xy)$$

$$y'[x\cos(xy) + 1] = 2x - y\cos(xy)$$

**Respuesta:** $y' = \frac{2x-y\cos(xy)}{x\cos(xy)+1}$.

**PROFE TEO**

¡Atención a la regla del producto! Cuando veas $xy$, es el producto de dos funciones. Derivada del primero por el segundo más el primero por la derivada del segundo: $(1)y + x(y')$.

**Problema Resuelto 4: Trascendentes Mixtas**

**Enunciado:** Halle $y'$ para $e^y + \ln(xy) = x$.
**Solución:** Derivamos ambos miembros. Al logaritmo le aplicamos su propiedad o derivamos por regla de la cadena:

$$e^y \cdot y' + \frac{1}{xy}(y + xy') = 1$$

$$e^y y' + \frac{1}{x} + \frac{y'}{y} = 1$$

Multiplicamos todo por $xy$ (o despejamos directamente los términos con $y'$):

$$y'\left(e^y + \frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{1}{x}$$

Multiplicando num y den por sus denominadores:

$$y'\left(\frac{ye^y + 1}{y}\right) = \frac{x-1}{x}$$

**Respuesta:** $y' = \frac{y(x-1)}{x(ye^y+1)}$.

**Problema Resuelto 5: Segunda Derivada Implícita**

**Enunciado:** Halle $y''$ simplificada para la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$.
**Solución:** Primero obtenemos $y'$:

$$2x - 2yy' = 0 \implies y' = \frac{x}{y}$$

Ahora derivamos $y'$ aplicando la regla del cociente para obtener $y''$:

$$y'' = \frac{(1)(y) - (x)(y')}{y^2}$$

Sustituimos $y' = \frac{x}{y}$ dentro de la segunda derivada:

$$y'' = \frac{y - x\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2} = \frac{\frac{y^2-x^2}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3}$$

De la ecuación original, sabemos que $y^2 - x^2 = -16$. Sustituimos esto: **Respuesta:** $y'' = -\frac{16}{y^3}$.

**PROFE TEO**

En las segundas derivadas implícitas ($y''$), derivas tu $y'$ y siempre te quedará otra $y'$ colgando. Al final, debes sustituir la $y'$ original que hallaste en el primer paso.

# Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Expansión Termodinámica

**Contexto:** Un entorno adiabático presenta presiones y volúmenes vinculados mediante $PV^{1,4} = K$. Determine la tasa de variación de la presión respecto al volumen cuando el gas se comprime sin despejar ecuaciones explícitas, evaluando su comportamiento estructural diferencial.
**Solución:** Derivando con regla del producto respecto a $V$: $\frac{dP}{dV}V^{1,4} + P(1{,}4V^{0,4}) = 0$. Despejando: $\frac{dP}{dV} = -\frac{1{,}4P\cdot V^{0,4}}{V^{1,4}}$. **Respuesta:** $\frac{dP}{dV} = -1{,}4\frac{P}{V}$.

### Aplicación 2: Ingeniería Óptica

**Contexto:** La ecuación de lentes delgados vincula distancia de imagen, objeto y foco constante: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$. Halle el ritmo de ajuste de la imagen respecto al objeto modelando la alteración visual focal.
**Solución:** Derivamos ambos lados respecto a $p$: $-p^{-2} - q^{-2}\frac{dq}{dp} = 0$. Despejando el término derivado: $q^{-2}\frac{dq}{dp} = -p^{-2}$. **Respuesta:** $\frac{dq}{dp} = -\left(\frac{q}{p}\right)^2$.

**PROFE TEO**
Muchas fórmulas en física, como la de las lentes, son más fáciles de derivar usando exponentes negativos ($p^{-1} + q^{-1} = f^{-1}$) en lugar de la molesta regla del cociente.

### Aplicación 3: Economía de Producción

**Contexto:** El nivel productivo constante acata la curva iso-cuanta de capital y labor $10K^{0,6}L^{0,4} = 5000$. Calcule el gradiente marginal de sustitución técnica, derivando el capital respecto a la labor de forma implícita.
**Solución:** Derivando respecto a $L$: $10[0{,}6K^{-0,4}\frac{dK}{dL}L^{0,4} + K^{0,6}(0{,}4L^{-0,6})] = 0$. Simplificando potencias: $6\frac{L^{0,4}}{K^{0,4}}\frac{dK}{dL} + 4\frac{K^{0,6}}{L^{0,6}} = 0$. **Respuesta:** $\frac{dK}{dL} = -\frac{2K}{3L}$.

### Aplicación 4: Curvatura Aerodinámica

**Contexto:** El contorno transversal de un ala furtiva se define implícitamente por el elipsoide modificado $4x^2 - xy + 2y^2 = 100$. Obtenga la inclinación tangente geométrica para soldar sensores de flujo turbulento estructural.
**Solución:** Derivamos la curva respecto a $x$: $8x - (y + xy') + 4yy' = 0$. Agrupamos $y'$: $y'(4y - x) = y - 8x$. **Respuesta:** $y' = \frac{y-8x}{4y-x}$.

### Aplicación 5: Dinámica de Crecimiento

**Contexto:** Una biocenosis microbiana interactúa simbióticamente manteniendo sus poblaciones iniciales bajo la trayectoria orbital $\ln(xy) = x + y$. Cuantifique la sensibilidad poblacional de fluctuación del primer organismo frente al segundo en equilibrio.
**Solución:** Derivamos respecto a $x$: $\frac{y+xy'}{xy} = 1 + y'$. $\frac{1}{x} + \frac{y'}{y} = 1 + y'$. $y'(\frac{1}{y} - 1) = 1 - \frac{1}{x}$. **Respuesta:** $y' = \frac{y(x-1)}{x(1-y)}$.

# Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Analice teóricamente por qué derivar $y^3$ respecto a $x$ arroja $3y^2 \cdot y'$, mientras que derivar $x^3$ respecto a $x$ simplemente produce $3x^2$. ¿Qué rol juega el diferencial en este proceso?

2. Suponga que la derivada implícita de una elipse resulta en una fracción donde el denominador se hace cero en ciertos puntos. ¿Qué significado geométrico estricto tienen estas singularidades evaluadas?

3. Compare el nivel de esfuerzo algebraico entre despejar $y$ en $y^2 + y = \ln x$ para luego derivar, versus aplicar derivación implícita directa. ¿Cuándo resulta matemáticamente imposible el primer camino?

4. Si la ecuación de una curva es simétrica respecto al origen, ¿su derivada implícita evaluada en un punto $(a, b)$ preservará alguna simetría respecto al punto $(-a, -b)$? Demuestre con $x^2 + y^2 = r^2$.

5. Un compañero estudiante argumenta que al derivar implícitamente $xy = 1$, él aísla $y = x^{-1}$ antes. Justifique por qué ambas rutas deben arrojar el mismo valor analítico exacto al sustituir $y$.

6. Detalle el protocolo algebraico para encontrar la segunda derivada $y''$ implícitamente. ¿Por qué es fundamental reciclar la primera derivada obtenida en el último paso algebraico?

7. Analice la ecuación $\sin(x)+\cos(y) = 0$. ¿Puede la derivación implícita predecir los intervalos de dominio y rango en los cuales la recta tangente carece de existencia real?

8. Evalúe el impacto de la regla del producto encadenado en funciones como $x^2y^3$. Redacte una advertencia para evitar el error más común que cometen los universitarios al enfrentar esta estructura.

9. Demuestre que las pendientes de dos curvas dadas por ecuaciones implícitas ortogonales como $x^2 - y^2 = a$ y $xy = b$ mantienen un producto igual a $-1$ en sus puntos de intersección.

10. Al enfrentar curvas de grado superior como los folios de Descartes ($x^3 + y^3 = 3axy$), determine cómo la derivada implícita ayuda a encontrar rizos, autointersecciones y asíntotas inclinadas teóricas.

# Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

## Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** Encuentre $y'$ para la ecuación mixta $2x^2 + 5y^2 = 18$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Derivamos cada lado respecto a $x$: $4x +$ ______________ $\cdot y' = 0$.
2. Dejamos el término con $y'$ aislado: $10y \cdot y' =$ ______________.
3. Despejamos dividiendo: $y' = \frac{\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}}{10y} = -\frac{2x}{5y}$.

**Problema 2.** Obtenga la pendiente implícita para $x^3y^2 - 5x = 8$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Aplicamos producto en $x^3y^2$: $(3x^2)(y^2) + ($______________$)(2y \cdot y') - 5 = 0$.
2. Aislamos el bloque con $y'$ a la izquierda: $2x^3y \cdot y' =$ ______________ $- 3x^2y^2$.
3. Despejamos la derivada final: $y' = \frac{5-3x^2y^2}{\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}}$.

**Problema 3.** Halle $\frac{dy}{dx}$ para la relación trascendente $e^{xy} = x^2$.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Derivada de la exponencial: $e^{xy} \cdot ($_____ $\cdot y + x \cdot$ _____$) = 2x$.
2. Distribuimos $e^{xy}$: $ye^{xy} +$ __________ $= 2x$.
3. Despejamos extrayendo el término con $y'$: $y' = \frac{2x-\text{\_\_\_\_\_\_\_\_}}{xe^{xy}}$.

**PROFE TEO**

Siempre que veas la forma $e^{xy}$, al derivar implícitamente, la regla de la cadena inyectará un binomio. Recuerda colocar paréntesis al multiplicar.

## Problemas Generales Analíticos

**Problema 4.** Calcule $y'$ para la parábola rotada $x^2 - xy + y^2 = 7$.

**Problema 5.** Determine la derivada implícita de $y^4 - 2x^2y^3 = 4x$.

**Problema 6.** Halle $\frac{dy}{dx}$ en el contorno trigonométrico $\sin(x) + \cos(y) = 1$.

**Problema 7.** Derive la función compuesta elíptica $\sqrt{xy} = x + 1$.

**Problema 8.** Resuelva la derivada para el nudo cartesiano $\tan(x - y) = y$.

**Problema 9.** Encuentre la pendiente en la curva de logaritmos $\ln(x^2+y^2) = 2x$.

**Problema 10.** Derive algebraicamente el volumen implícito $(x+y)^3 = x^3 + y^3$.

**Problema 11.** Determine la recta tangente a la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ en $(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

**Problema 12.** Obtenga la derivada combinada de $e^y \cos(x) = 1 + \sin(xy)$.

**Problema 13.** Derive la curva lemniscata $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

**Problema 14.** Halle $y'$ para la ecuación logarítmica fraccionaria $y = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$.

**Problema 15.** Calcule la segunda derivada $y''$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

**Problema 16.** Derive la expresión anidada $\arcsin(xy) = x$.

**Problema 17.** Resuelva el operador analítico para $x^y = y^x$. (Ayuda: use logaritmos primero).

**Problema 18.** Encuentre $y'$ si la curva fractal se modela por $y \ln(x) = x \ln(y)$.

**Problema 19.** Determine la ecuación de la normal a la curva $x^2y^2 = 9$ en $(-1, 3)$.

**Problema 20.** Halle la segunda derivada implícita $y''$ de la relación elíptica $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

# Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

## Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** El perfil transversal de un domo geodésico modela compresión axial mediante la elipse $3x^2 + 4y^2 = 12$. Evalúe implícitamente la pendiente de tensión de la tangente estructural exterior en las coordenadas unitarias guiando su derivación absoluta.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Derivando implícitamente respecto a abscisas: $6x + \_\_\_\_ \cdot y' = 0$. 2. Despejando la pendiente general: $y' = -\frac{6x}{\_\_\_\_} = -\frac{3x}{4y}$. 3. Si el punto de impacto es $x = 1, y = 1{,}5$, resulta $y' = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

**Problema 2.** Un fluido no newtoniano desplaza turbulencia trazando curvas isobáricas hiperbólicas $x^2 - xy - y^2 = 5$. Determine el gradiente de presión lateral localizando la variación tangencial del flujo en posición estática coordinada.

**Guía de Solución Interactiva**

1. La derivada cruzada arroja: $2x - (y + \_\_\_\_) - 2yy' = 0$. 2. Factorizamos los caudales: $y'(-\_\_\_\_ - 2y) = y - 2x$. 3. Obtenemos el flujo final implícito: $y' = \frac{2x-y}{\_\_\_\_\_\_\_\_}$.

**Problema 3.** Un cable catenario ancla su puente de suspensión usando tensores ocultos cuya relación elástica define la estructura equilibrada $y + \sin(y) = x$. Calcule el factor de pandeo mecánico directo.

**Guía de Solución Interactiva**

1. Diferenciando el tensor elástico: $y' + \cos(y) \cdot \_\_\_\_ = 1$. 2. Agrupando rigideces: $y'(1 + \_\_\_\_) = 1$. 3. Tensión estructural final queda como fracción: $y' = \frac{1}{\_\_\_\_\_\_\_\_}$.

**PROFE TEO**

Las curvas físicas reales raramente se comportan como polinomios lindos. Ecuaciones encriptadas y elipses sesgadas exigen esta técnica geométrica.

## Problemas Generales Contextualizados

**Problema 4.** Una fibra óptica curva refleja haces láser internos según la difracción fronteriza $x^3y + y^3x = 10$. Determine la tasa geométrica del rebote fotónico marginal al incidir sobre el milímetro coordenado.

**Problema 5.** La cámara de resonancia acústica diseña ondas estacionarias bajo perfiles sonoros $x^2 + \cos(xy) = 2$. Calcule la alteración de amplitud oscilatoria evaluada en interferencias transversales.

**Problema 6.** Las líneas de flujo magnético en un rotor estator anidan bobinas modeladas mediante trayectorias $(x-y)^2 = x+y-1$. Detecte el ángulo de dispersión tangencial inductiva electromagnética constante.

**Problema 7.** Una población bacteriana doble compite en fase de sustrato obedeciendo el sistema orbital $\ln(xy^2) = 3x$. Evalúe la fluctuación biológica dependiente del primer microorganismo depredador estacionario.

**Problema 8.** El margen de utilidad económica de una firma tecnológica vincula inversión y ganancia $xe^y = ye^x$. Despeje el factor de retorno corporativo marginal operando la curva.

**Problema 9.** Una isoterma química de adsorción condensa gases tóxicos acatando la ecuación fraccionaria $\frac{x^2}{y^3} = x + y$. Precise la velocidad de concentración estequiométrica del catalizador sintético puro.

**Problema 10.** Un esquema criptográfico de curva elíptica cifra bloques binarios usando llaves asimétricas sobre $y^2 = x^3 - 4x + 1$. Determine la pendiente logarítmica descifrando nudos informáticos de validación.

**Problema 11.** Un brazo robótico limita su torque de flexión mecánica anclando juntas bajo el confinamiento paramétrico $x^4 + y^4 = 16xy$. Encuentre la holgura angular tolerando máxima tracción robótica.

**Problema 12.** La perturbación orbital de un satélite atrapado por gravedad binaria oscila con trayectoria astral $x^{2/5}+y^{2/5} = a^{2/5}$. Halle la velocidad de corrección espacial en cuadrantes anómalos.

**Problema 13.** Un frente de onda sísmica profunda propaga réplicas tectónicas siguiendo la propagación subterránea $y\sin(x^2) = x\sin(y^2)$. Diagnostique la fractura oblicua cortante midiendo fallas telúricas locales.

**Problema 14.** El tensor de esfuerzo-deformación transversal de una aleación aeronáutica pandea grietas invisibles $\arctan(x/y) = x + y$. Cuantifique la fatiga de matriz compuesta soportando cizalladura estructural.

**Problema 15.** Un sistema criogénico termodinámico comprime helio líquido usando ecuación real de gas imperfecto $(p + \frac{a}{v^2})(v - b) = R$. Derive implícitamente presión versus volumen ignorando constantes físicas.

**Problema 16.** El perfil de elevación marítima provocado por maremotos traza frentes costeros de arrastre $e^{x-y} = \frac{y}{x}$. Estime la cresta dinámica prediciendo colisión oceánica de olas kilométricas repentinas.

**Problema 17.** La biodisponibilidad farmacológica infunde plasma venoso donde la dosis satura la enzima hepática trazando $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\arctan(y/x)}$. Obtenga el pico de absorción metabólica instantánea.

**Problema 18.** Un modelo ecológico depredador-presa exhibe órbitas cíclicas cerradas invariantes $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 + xy$. Evalúe el declive de especies estimando el vector tangente de extinción biológica.

**Problema 19.** La función de onda probabilística cuántica envuelve átomos confinando estados ligados de partícula $x^3 + 3x^2y - y^3 = 8$. Prediga el nivel de incerteza geométrica saltando electrones de valencia.

**Problema 20.** La metalurgia forense traza la frontera de enfriamiento en metales fundidos endureciendo bajo el diagrama de fases $y = x^y$. Obtenga la gradiente de cristalización sólida molecular.

# Claves de Respuestas

### Propuestos Matemáticos

1. $-2x/5y$.
2. $(5-3x^2y^2)/(2x^3y)$.
3. $(2x-ye^{xy})/(xe^{xy})$.
4. $(y-2x)/(2y-x)$.
5. $(2+2xy^3)/(2y^3-3x^2y^2)$.
6. $\cos x/\sin y$.
7. $y/x-2y/\sqrt{xy}$.
8. $\frac{\sec^2(x-y)}{\sec^2(x-y)+1}$.
9. $(x^2+y^2-x)/y$.
10. $-x/y$.
11. $y-2\sqrt{2}=-(x-2\sqrt{2})$.
12. $\frac{y\cos(xy)+e^y\sin x}{e^y\cos x-x\cos(xy)}$.
13. $\frac{x(1-x^2-y^2)}{y(1+x^2+y^2)}$.
14. $y/(x(y+1))$.
15. $-1/y^3$.
16. $\frac{\sqrt{1-x^2y^2}-y}{x}$.
17. $\frac{y(y-x\ln y)}{x(x-y\ln x)}$.
18. $\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$.
19. $y-3=\frac{1}{3}(x+1)$.
20. $-b^4/(a^2y^3)$.

### Propuestos de Aplicación

1. $-0{,}5$ pendiente elíptica.
2. $(2x-y)/(x+2y)$.
3. $1/(1+\cos y)$.
4. $-(3x^2y+y^3)/(x^3+3xy^2)$.
5. $(y\sin(xy)-2x)/(x\sin(xy))$.
6. $(2(x-y)-1)/(2(x-y)+1)$.
7. $y(3x-1)/2x$.
8. $\frac{y(e^x-e^y)}{x(e^y-e^x)}$.
9. $\frac{2x-y^3}{3x^2+y^4}$.
10. $(3x^2-4)/2y$.
11. $\frac{4y-x^3}{y^3-4x}$.
12. $-(y/x)^{3/5}$.
13. $\frac{\sin(y^2)-2xy\cos(x^2)}{2xy\cos(y^2)-\sin(x^2)}$.
14. $\frac{y^2-x^2-y^2-x^2}{y^2+x^2+x}$.
15. $\frac{2a(v-b)-v^3(p+a/v^2)}{v^3(v-b)}$.
16. $\frac{y(xe^{x-y}+1)}{x(ye^{x-y}+1)}$.
17. $\frac{x+y}{x-y}$.
18. $\frac{x/2-y}{x-2y/9}$.
19. $\frac{x^2+2xy}{y^2-x^2}$.
20. $\frac{y^2}{x(1-y\ln x)}$.

# ¡La Incógnita Revelada!

'No todas las respuestas en la vida ni en la ciencia están despejadas y listas para usarse. A veces, la variable que buscas está oculta, enredada entre otras. La verdadera habilidad geométrica radica en saber derivar la verdad de su entorno, paso a paso, hasta que su forma final emerja con total claridad.'

- La regla del orden implícito

¡Enhorabuena! Has perfeccionado una de las técnicas de navegación diferencial más elegantes y potentes de todo el análisis matemático.

$dy$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com