$\forall\varepsilon > 0$

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE

CUADERNO DE TRABAJO

Demostraciones Rigurosas $\varepsilon - \delta$

$\exists\delta > 0$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Rigor Matemático Absoluto

Hasta ahora hemos entendido los límites de forma intuitiva como una .ªproximación". Sin embargo, en matemáticas superiores necesitamos una definición a prueba de balas. Augustin-Louis Cauchy y Karl Weierstrass formalizaron este concepto usando las letras griegas ε (épsilon) y δ (delta).

1. La Definición Rigurosa

Decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si y solo si: Para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que, si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- $|f(x) - L| < \varepsilon$**:** La distancia entre la función y el límite es menor que el error tolerado ε.
- $0 < |x - a| < \delta$**:** La distancia entre x y a es menor que δ. El $0 <$ indica que $x \neq a$ (el límite no depende de lo que ocurra en $f(a)$).

PROFE TEO

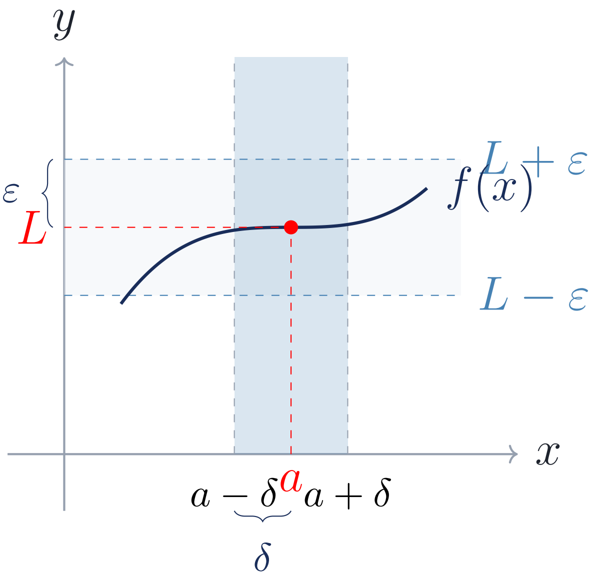
Piensa en ε como el margen de error que exige tu cliente (el eje Y), y en δ como la precisión con la que debes calibrar tu máquina (el eje X) para cumplirle.

2. Interpretación Geométrica

Geométricamente, esto significa que si trazamos una banda horizontal de ancho 2ε alrededor de L, siempre podremos encontrar una banda vertical de ancho 2δ alrededor de a de manera que, si x está en la banda vertical, su imagen $f(x)$ quedará atrapada de forma segura dentro de la banda horizontal.

PROFE TEO

¡Ojo aquí! Toda demostración consta de dos fases: 1) El "trabajo en sucio"(exploración algebraíca para hallar δ) y 2) La "demostración formal"(redactar desde el ε hasta el δ).



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Función Lineal Básica

Enunciado: Demuestre rigurosamente que $\lim_{x\to 3}(4x-5) = 7$.
Solución: Análisis previo: Queremos $|(4x-5)-7| < \varepsilon \implies |4x-12| < \varepsilon \implies 4|x-3| < \varepsilon \implies |x-3| < \frac{\varepsilon}{4}$. **Demostración Formal:** Sea $\varepsilon > 0$ dado. Elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Si $0 < |x-3| < \delta$, entonces: $|x-3| < \frac{\varepsilon}{4} \implies 4|x-3| < \varepsilon \implies |4x-12| < \varepsilon \implies |(4x-5)-7| < \varepsilon$. La demostración concluye.

Problema Resuelto 2: Función Cuadrática

Enunciado: Demuestre que $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.
Solución: Análisis: Necesitamos $|x^2-4| < \varepsilon \implies |x-2||x+2| < \varepsilon$. Acotamos: Supongamos $\delta \le 1$. Si $|x-2| < 1 \implies -1 < x-2 < 1 \implies 1 < x < 3$. Sumando 2: $3 < x+2 < 5$. Por tanto, $|x+2| < 5$. Entonces $|x-2|(5) < \varepsilon \implies |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$. **Demostración:** Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{5})$. Si $0 < |x-2| < \delta$: $|x^2-4| = |x-2||x+2| < \delta \cdot 5 \le \left(\frac{\varepsilon}{5}\right) \cdot 5 = \varepsilon$. ■

> **PROFE TEO**
> Para funciones no lineales (como x^2 o $1/x$), tu δ dependerá de ε y del punto a. A menudo tendrás que acotar $\delta \le 1$ para controlar el término rebelde.

Problema Resuelto 3: Función Racional

Enunciado: Demuestre mediante $\varepsilon - \delta$ que $\lim_{x\to 4} \frac{1}{x} = \frac{1}{4}$.
Solución: Análisis: $|\frac{1}{x} - \frac{1}{4}| = |\frac{4-x}{4x}| = \frac{|x-4|}{4|x|}$. Acotamos el denominador: Asumimos $\delta \le 2$. Si $|x-4| < 2 \implies 2 < x < 6$. Por tanto, $|x| > 2 \implies \frac{1}{|x|} < \frac{1}{2}$. Sustituyendo: $\frac{|x-4|}{4|x|} < \frac{|x-4|}{4(2)} = \frac{|x-4|}{8} < \varepsilon \implies |x-4| < 8\varepsilon$. **Demostración:** Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta = \min(2, 8\varepsilon)$. Si $0 < |x-4| < \delta$: $|\frac{1}{x} - \frac{1}{4}| = \frac{|x-4|}{4|x|} < \frac{\delta}{8} \le \frac{8\varepsilon}{8} = \varepsilon$. ■

Problema Resuelto 4: Función con Raíz

Enunciado: Demuestre que $\lim_{x\to 9} \sqrt{x} = 3$.
Solución: Análisis: $|\sqrt{x}-3| = |\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3}| = \frac{|x-9|}{\sqrt{x}+3}$. Como $\sqrt{x} \ge 0$, se cumple que $\sqrt{x}+3 \ge 3$. Entonces $\frac{1}{\sqrt{x}+3} \le \frac{1}{3}$. Por tanto, $\frac{|x-9|}{\sqrt{x}+3} \le \frac{|x-9|}{3} < \varepsilon \implies |x-9| < 3\varepsilon$. **Demostración:** Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = 3\varepsilon$. Si $0 < |x-9| < \delta$: $|\sqrt{x}-3| = \frac{|x-9|}{\sqrt{x}+3} \le \frac{|x-9|}{3} < \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon$. ■

> **PROFE TEO**
> ¡El truco de la acotación! Siempre que tengas un producto de $|x-a|$ por otra cosa $g(x)$, asume un δ pequeño (ej. $\delta \le 1$) para atrapar a $g(x)$ entre dos números.

Problema Resuelto 5: Polinomio Cúbico Acotado

Enunciado: Demuestre formalmente que $\lim_{x\to 1} x^3 = 1$.
Solución: Análisis: $|x^3-1| = |x-1||x^2+x+1|$. Supongamos $\delta \le 1 \implies 0 < x < 2$. Maximizamos el segundo factor: $|x^2+x+1| < 2^2+2+1 = 7$. Entonces $|x-1|(7) < \varepsilon \implies |x-1| < \frac{\varepsilon}{7}$. **Demostración:** Dado $\varepsilon > 0$, definimos $\delta = \min(1, \frac{\varepsilon}{7})$. Si $0 < |x-1| < \delta$, entonces: $|x^3-1| = |x-1||x^2+x+1| < \delta \cdot 7 \le \left(\frac{\varepsilon}{7}\right) \cdot 7 = \varepsilon$. ■

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Mecanizado de Ejes

Contexto: El área transversal de un pistón es $A(r) = \pi r^2$. El área ideal es 16π mm^2 ($r = 4$). Si se permite un margen de error $\varepsilon = 0{,}5\pi$ en el área, halle la tolerancia δ rigurosa para el radio.
Solución: Queremos $|\pi r^2 - 16\pi| < 0{,}5\pi \implies |r^2 - 16| < 0{,}5 \implies 15{,}5 < r^2 < 16{,}5$. $\sqrt{15{,}5} < r < \sqrt{16{,}5} \implies 3{,}937 < r < 4{,}062$. Distancias a 4: $|3{,}937 - 4| = 0{,}063$ y $|4{,}062 - 4| = 0{,}062$. **Respuesta:** Se toma el menor, $\delta = 0{,}062$ mm.

Aplicación 2: Resistencia Eléctrica

Contexto: La corriente en un circuito de 12V es $I(R) = 12/R$. Si la resistencia nominal es $R = 3\Omega$, la corriente es 4A. Para mantener la corriente a menos de $\varepsilon = 0{,}1A$ de 4A, halle δ para R.
Solución: $|\frac{12}{R} - 4| < 0{,}1 \implies -0{,}1 < \frac{12}{R} - 4 < 0{,}1 \implies 3{,}9 < \frac{12}{R} < 4{,}1$. Invertimos: $\frac{1}{4{,}1} < \frac{R}{12} < \frac{1}{3{,}9} \implies \frac{12}{4{,}1} < R < \frac{12}{3{,}9} \implies 2{,}926 < R < 3{,}076$. Distancias a 3: $3 - 2{,}926 = 0{,}074$; $3{,}076 - 3 = 0{,}076$. **Respuesta:** $\delta = 0{,}074\Omega$.

Aplicación 3: Calibración de Sonar

Contexto: La frecuencia de rebote acústico modela $f(x) = 2x - 1$. Se requiere que $f(x)$ diste de 5 en no más de $\varepsilon = 0{,}04$ Hz cerca de $x = 3$. Estime el margen paramétrico δ necesario.
Solución: $|(2x-1) - 5| < 0{,}04 \implies |2x - 6| < 0{,}04$. Factorizando: $2|x - 3| < 0{,}04$. Despejando: $|x - 3| < 0{,}02$. **Respuesta:** La tolerancia de calibración es $\delta = 0{,}02$.

PROFE TEO
En los problemas aplicados, δ asimétrico significa que equivocarte "por la izquierda"no es igual que "por la derecha". Siempre escoge el δ más restrictivo (el menor).

Aplicación 4: Dilatación Cúbica

Contexto: El volumen de un cubo metálico sometido a calor es $V(L) = L^3$. Se busca un volumen de 125 cm^3 ($L = 5$). Si el control de calidad tolera un $\varepsilon = 1{,}5$ cm^3, determine δ del lado.
Solución: $|L^3 - 125| < 1{,}5 \implies 123{,}5 < L^3 < 126{,}5$. Extrayendo raíz cúbica: $4{,}9799 < L < 5{,}0199$. Distancias a 5: $5 - 4{,}9799 = 0{,}0201$; $5{,}0199 - 5 = 0{,}0199$.
Respuesta: Elegimos $\delta = 0{,}0199$ cm.

Aplicación 5: Algoritmo Financiero

Contexto: Un bot evalúa un índice $I(t) = \sqrt{4t+1}$. En $t = 2$, el índice es 3. El bot dispara una alerta si el índice varía en $\varepsilon = 0{,}2$. Calcule el intervalo de seguridad δ temporal.
Solución: $|\sqrt{4t+1} - 3| < 0{,}2 \implies 2{,}8 < \sqrt{4t+1} < 3{,}2$. Elevando al cuadrado: $7{,}84 < 4t+1 < 10{,}24 \implies 6{,}84 < 4t < 9{,}24 \implies 1{,}71 < t < 2{,}31$. Distancias a 2: $2 - 1{,}71 = 0{,}29$; $2{,}31 - 2 = 0{,}31$. **Respuesta:** El margen es $\delta = 0{,}29$ milisegundos.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué en la definición rigurosa el valor de ε siempre debe ser propuesto primero, antes de buscar δ?
2. En la desigualdad $0 < |x - a| < \delta$, justifique geométricamente la inclusión estricta de $0 < |x - a|$.
3. Si para un ε específico encuentra un $\delta = 0{,}05$ que satisface la definición, ¿el valor $\delta = 0{,}01$ también es válido? Explique el principio.
4. Durante la acotación de $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$, si un estudiante asume inicialmente $\delta \leq 2$ en lugar de $\delta \leq 1$, ¿afectaría la validez de su demostración final?
5. Redacte en lenguaje natural la negación lógica de la definición de límite (es decir, qué significa estrictamente que un límite no exista).
6. Explique por qué en problemas físicos o de ingeniería las tolerancias reales δ suelen ser asimétricas y por qué el teorema matemático exige elegir el valor mínimo.
7. ¿Es posible usar la definición $\varepsilon - \delta$ para calcular el valor de un límite desconocido desde cero? Sustente su posición.
8. Analice la función constante $f(x) = C$. Si $\lim_{x\to a} C = C$, ¿qué valor de δ se podría asignar para cualquier $\varepsilon > 0$?
9. Si el límite evaluado presenta una discontinuidad evitable en $x = a$, ¿cómo sortea la definición formal esta ausencia de imagen en el dominio?
10. En la demostración de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $a = 0$, ¿qué barrera algebraica insalvable nos impide encontrar un δ acotado?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Demuestre que $\lim_{x\to 2}(5x-3) = 7$.

Guía de Solución Interactiva

1. Trabajo previo: Queremos $|(5x-3)-\_\_\_\_| < \varepsilon$. Simplificando: $|5x-10| < \varepsilon$.

2. Factorizamos el coeficiente de x: $\_\_\_\_|x-2| < \varepsilon \implies |x-2| < \frac{\varepsilon}{\_\_\_\_}$.

3. Demostración formal: Sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $\delta = \_\_\_\_\_\_$. Si $0 < |x-2| < \delta$, se cumple la tesis.

Problema 2. Demuestre acotando que $\lim_{x\to 3}(x^2-2x) = 3$.

Guía de Solución Interactiva

1. Queremos $|(x^2-2x)-3| < \varepsilon$. Factorizando: $|x-3||\_\_\_\_\_\_| < \varepsilon$.

2. Acotamos asumiendo $\delta \leq 1$. Si $|x-3| < 1$, entonces $\_\_\_\_ < x < \_\_\_\_$. Sumando 1, $|x+1| < \_\_\_\_$.

3. Reemplazando: $|x-3|(5) < \varepsilon$. Por tanto, elegimos $\delta = \min(1, \_\_\_\_\_\_)$.

Problema 3. Demuestre con radicales que $\lim_{x\to 16}\sqrt{x} = 4$.

Guía de Solución Interactiva

1. Sea $|\sqrt{x}-4| < \varepsilon$. Multiplicamos por la conjugada para obtener: $\frac{|x-16|}{|\sqrt{x}+\_\_\_\_\_\_|} < \varepsilon$.

2. Como $x > 0$, la expresión inferior cumple $\sqrt{x}+4 > \_\_\_\_$.

3. Acotando, $\frac{|x-16|}{4} < \varepsilon \implies |x-16| < \_\_\_\_\_\_$. Elegimos $\delta = \_\_\_\_\_\_$.

PROFE TEO
Las raíces cuadradas exigen multiplicar por su conjugada para liberar a la 'x' de su prisión radical y así encontrar tu anhelado $|x-a|$.

Problemas Generales para Demostrar

Problema 4. Demuestre formalmente que $\lim_{x\to 4}(3x-7) = 5$.

Problema 5. Demuestre $\lim_{x\to -1}(-2x+1) = 3$.

Problema 6. Demuestre rigurosamente $\lim_{x\to 0}(4x) = 0$.

Problema 7. Demuestre acotando que $\lim_{x\to 1}(x^2+3) = 4$.

Problema 8. Demuestre $\lim_{x\to 4}(x^2 - x) = 12$.

Problema 9. Demuestre mediante el método de acotación $\lim_{x\to 2}(x^3 - 1) = 7$.

Problema 10. Demuestre $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$.

Problema 11. Demuestre $\lim_{x\to 3} \frac{2}{x} = \frac{2}{3}$.

Problema 12. Demuestre formalmente que $\lim_{x\to 25} \sqrt{x-9} = 4$.

Problema 13. Demuestre usando conjugadas $\lim_{x\to 2} \sqrt{x+2} = 2$.

Problema 14. Demuestre con acotación $\lim_{x\to 0} x^4 = 0$.

Problema 15. Demuestre $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$.

Problema 16. Demuestre que si $f(x) = c$, entonces $\lim_{x\to a} c = c$.

Problema 17. Demuestre que $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0$. (Sugerencia: $|\sin(\cdot)| \leq 1$).

Problema 18. Demuestre $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{x-1} = 7$.

Problema 19. Demuestre rigurosamente $\lim_{x\to 1} x^3 + x^2 = 2$.

Problema 20. Demuestre $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ para cualquier $a > 0$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso (Hallar el valor numérico de δ)

Problema 1. Un disco duro gira a rpm dadas por $V(t) = 4t + 10$. En $t = 50$, $V = 210$. Se requiere un error máximo de rpm de $\varepsilon = 2$. Halle el tiempo δ admisible.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos la desigualdad: $|4t + 10 - \_\_\_\_\_| < 2$. 2. Reducimos el interior: $|4t - \_\_\_\_\_| < 2 \implies 4|t - 50| < 2$. 3. Despejando obtenemos la desviación de tiempo $\delta = \_\_\_\_\_$ milisegundos.

Problema 2. Una cámara fotográfica tiene apertura $A(d) = d^2$. Para $d = 3$, el área es 9. Si toleramos un desenfoque $\varepsilon = 0{,}5$ en el área, encuentre la tolerancia simétrica δ en milímetros.

Guía de Solución Interactiva

1. Condición impuesta: $8{,}5 < \_\_\_\_\_ < 9{,}5$. 2. Raíces cuadradas: $\_\_\_\_\_ < d < \_\_\_\_\_$. 3. Calculamos la distancia mínima respecto a $d = 3$, arrojando un δ estricto de $\_\_\_\_\_$ mm.

Problema 3. Una infusión intravenosa libera sustrato $C(x) = \frac{10}{x}$. Se requiere que en $x = 2$ hrs, la caída de concentración 5 no exceda $\varepsilon = 0{,}2$. Verifique el intervalo temporal admisible.

Guía de Solución Interactiva

1. Plasmamos el límite clínico: $4{,}8 < \frac{10}{x} < \_\_\_\_\_$. 2. Invirtiendo la relación fraccionaria: $\frac{10}{5{,}2} < x < \_\_\_\_\_$. 3. Evaluando la brecha más crítica hacia $x = 2$, establecemos $\delta = \_\_\_\_\_$ horas.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Un láser corta microchips emitiendo radiación $R(v) = 3v - 1$. Si el protocolo exige que la emisión no difiera de 8 por más de $\varepsilon = 0{,}15$, determine el margen δ del voltaje v a calibrar.

Problema 5. El termostato de un acuario exótico eleva los grados marcando $T(p) = 2p^2 + 1$. Para estabilizar en 19 grados con un error $\varepsilon = 0{,}2$, ¿cuál es el tope restrictivo δ de la presión del panel?

Problema 6. La altitud de un cuadricóptero obedece a la potencia como $H(w) = \sqrt{w}$. Se requiere suspenderlo a 10 metros. Si la brisa permite un desfase $\varepsilon = 0{,}5m$, evalúe numéricamente el límite de potencia δ.

Problema 7. Cierta cavidad resonante procesa armónicos $F(L) = \frac{120}{L}$. Para sintonizar a 30 Hz ($L = 4$), evadiendo un ruido blanco de $\varepsilon = 1{,}5$ Hz, delimite la variación geométrica estricta de la cavidad mediante δ.

Problema 8. El flujo aerodinámico rompe la barrera del sonido en $S(t) = t^3$. Si se planea el estallido sónico para 8 Machs con fluctuación térmica $\varepsilon = 0{,}6$, defina el control temporal exacto requerido en milisegundos.

Problema 9. Una centrífuga separa isótopos a velocidad radial $W(r) = r^2 - r$. Operando idealmente a radio $r = 3$, el marco permite una desviación inercial $\varepsilon = 0{,}4$. Extraiga el factor de balance asimétrico δ.

Problema 10. La enzima digestiva cataliza proteínas formando enlaces $P(c) = \sqrt{2c + 1}$. Se espera un nivel 3 de asimilación. Bajo una perturbación biológica $\varepsilon = 0{,}1$, aísle algebraicamente la concentración límite.

Problema 11. Las aspas de un parque eólico generan kilovatios $E(v) = 5v^2$. Con vientos base de 4 m/s rinden 80 kW. Si la red eléctrica soporta caídas de $\varepsilon = 10$, identifique la ventana aerodinámica δ.

Problema 12. El estrés del cable de un puente colgante marca $T(g) = 1/(g-1)$. Con peso $g = 3$ toneladas, soporta media unidad métrica. Para blindarlo frente a ráfagas con margen $\varepsilon = 0{,}05$, indique su resiliencia técnica.

Problema 13. La viscosidad lubricante de un motor decrece al friccionar siguiendo $V(x) = x^4$. Calibrada a viscosidad 16 (índice 2), prevea la alteración δ máxima admitiendo un desgaste interno viscoso tolerante de $\varepsilon = 1{,}2$.

Problema 14. Un lente astronómico refracta luz midiendo foco $L(x) = \frac{x+2}{x}$. Para un enfoque planetario de 1.5 dioptrías, calcule el micrómetro de ajuste lateral δ impidiendo aberraciones esféricas mayores a $\varepsilon = 0{,}05$.

Problema 15. El nanorecubrimiento anticorrosivo tiene espesor $C(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Se inyectan 4 unidades plasmáticas logrando grosor 0.5. Halle la precisión inyectable que garantice espesores dentro de un riguroso $\varepsilon = 0{,}02$.

Problema 16. La cámara de plomo aísla radiación mitigando bequerelios $R(d) = d^2 - 3d + 2$. Escudo de $d = 5$ filtra 12 Bq. Delimite el grosor de contingencia para radiaciones letales parásitas $\varepsilon = 0{,}25$.

Problema 17. Un sismógrafo digital percibe vibraciones bajo modelo $V(a) = \frac{a^2-1}{a-1}$. En micro-amplitud 1 arroja magnitud 2. Diseñe el algoritmo depurador para temblores falsos descartando un parámetro estocástico $\varepsilon = 0{,}001$.

Problema 18. La levadura de cerveza fermenta lúpulos a ritmo $F(t) = \sqrt[3]{t}$. Cumplidas 8 horas procesa índice 2. Regule los cronómetros de las cubas evitando acidificación que rebase la meta química por $\varepsilon = 0{,}1$.

Problema 19. Cierta válvula subterránea soporta presiones hidrológicas $P(d) = |d-5|$. A diez metros retiene 5 atmósferas. Determine la zanja de construcción estructural admitiendo variaciones subterráneas críticas de apenas $\varepsilon = 0{,}3$ atm.

Problema 20. El ancho de banda encriptado se transmite a $B(s) = \sin(s)/s$. Analizando la latencia asintótica para s cercano a cero (valor ideal 1), deduzca la restricción de ruteo asumiendo una pérdida $\varepsilon = 0{,}01$ por hardware.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos (δ sugerido)

1. $\delta = \varepsilon/5$.
2. $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/5)$.
3. $\delta = 4\varepsilon$.
4. $\delta = \varepsilon/3$.
5. $\delta = \varepsilon/2$.
6. $\delta = \varepsilon/4$.
7. $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/3)$.
8. $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/8)$.
9. $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/19)$.
10. $\delta = \text{mín}(1, 2\varepsilon)$.
11. $\delta = \text{mín}(1, \frac{3\varepsilon}{2})$.
12. $\delta = 4\varepsilon$.
13. $\delta = 2\varepsilon$.
14. $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon)$.
15. $\delta = \varepsilon$ (simplifica a línea).
16. $\delta =$ cualquier real.
17. $\delta = \varepsilon$.
18. $\delta = \text{mín}(0{,}5, \varepsilon/16)$.
19. $\delta = \text{mín}(1, \varepsilon/8)$.
20. $\delta = \sqrt{a}\varepsilon$.

Propuestos de Aplicación (Numéricos)

1. 0,5 ms.
2. 0,082 mm.
3. 0,076 horas.
4. $\delta = 0{,}05$.
5. $\delta = 0{,}016$.
6. $\delta = 9{,}75$ m (inferior es crítica).
7. $\delta = 0{,}190$ cm.
8. $\delta = 0{,}041$ ms.
9. $\delta = 0{,}078$ mm.
10. $\delta = 0{,}285$ mol/L.
11. $\delta = 0{,}258$ m/s.
12. $\delta = 0{,}181$ tons.
13. $\delta = 0{,}037$.
14. $\delta = 0{,}333$ micrones.
15. $\delta = 0{,}297$ unidades.
16. $\delta = 0{,}035$ mm.
17. $\delta = 0{,}001$.
18. $\delta = 1{,}141$ min.
19. $\delta = 0{,}3$ metros.
20. $\delta \approx 0{,}244$ mseg.

¡Demostración Concluida!

'La precisión absoluta no nace de la intuición, sino de la disciplina rigorosa de probar que, sin importar la adversidad ε, tu preparación δ siempre será suficiente.'

- La belleza del rigor matemático

¡Sobresaliente! Has trascendido el cálculo básico para entender el corazón puro de las matemáticas modernas. Queda demostrado que tu potencial no tiene límite.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com