$f : A \to B$

PRECÁLCULO

DEFINICIÓN FORMAL DE FUNCIÓN

CUADERNO DE TRABAJO

Mapeo, Dominio, Rango y Prueba Vertical

$\mathrm{Dom}(f)$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Concepto Formal de Función

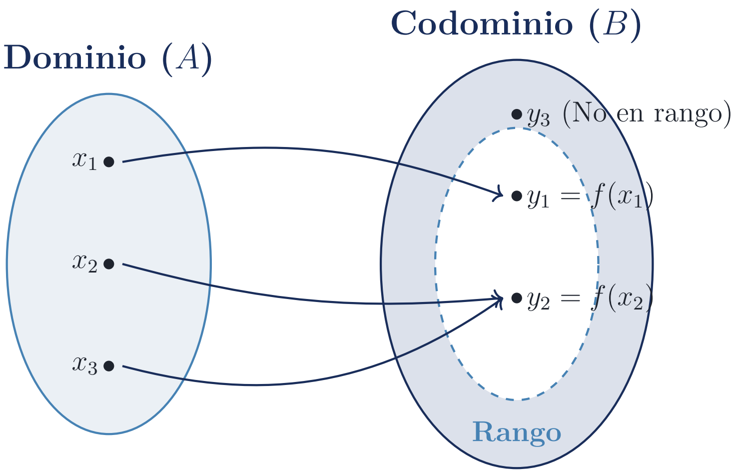
En matemáticas superiores, una función no es solo una "fórmula". Es una regla estricta de asignación entre dos conjuntos.

1. Definición Formal y Mapeo

Una **función** f de un conjunto A a un conjunto B (denotada $f : A \to B$) es una relación que asigna a **cada** elemento $x \in A$ **exactamente un** elemento $y \in B$.

- **Dominio (A):** Conjunto de todas las entradas válidas (valores de x).
- **Codominio (B):** Conjunto que contiene todos los posibles valores de salida.
- **Rango (o Imagen):** Subconjunto del codominio formado por los valores y que realmente son alcanzados por la función.

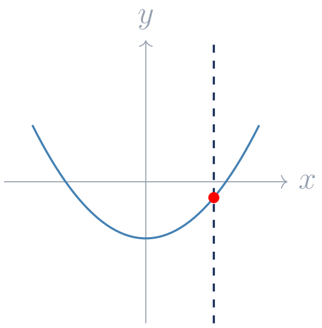
PROFE TEO
¡Ojo aquí! Todo Rango está dentro del Codominio, pero no todo Codominio es el Rango. El codominio es el üniverso posible"de llegadas, el rango son las llegadas reales".



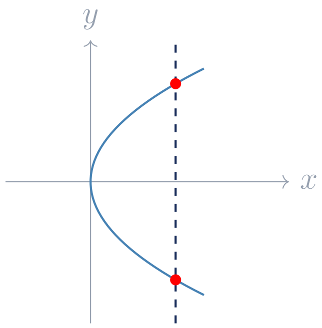
2. La Prueba de la Línea Vertical

Para que una gráfica en el plano cartesiano represente una función $y = f(x)$, **ninguna línea vertical** debe intersectar la curva en más de un punto. Si una línea vertical corta la gráfica dos o más veces, un mismo valor de x tendría múltiples valores de y, violando la definición de función.

PROFE TEO
Si una curva falla la prueba de la línea vertical, sigue siendo una ecuación matemática válida (como una circunferencia), pero **no** es una función en $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



SÍ ES FUNCIÓN (1 corte)



NO ES FUNCIÓN (2 cortes)

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema 1: Dominio con Restricción Radical y Racional

Enunciado: Determine el dominio de $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{x^2-16}$.
Solución: El radicando debe ser no negativo: $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3$.
El denominador no puede ser cero: $x^2 - 16 \neq 0 \implies x \neq \pm 4$.
Interceptando ambas condiciones: $x \geq 3$ y $x \neq 4$ ($x = -4$ ya está excluido por $x \geq 3$).
$\text{Dom}(f) = [3, 4) \cup (4, +\infty)$.

PROFE TEO
Cuidado con los logaritmos. El argumento de un logaritmo siempre debe ser estrictamente mayor a cero, ¡nunca igual a cero!

Problema 2: Dominio de Función Logarítmica Absoluta

Enunciado: Halle el dominio de $g(x) = \ln(|x| - 2)$.
Solución: El argumento del logaritmo debe ser positivo: $|x| - 2 > 0 \implies |x| > 2$.
Por propiedad del valor absoluto: $x > 2$ o $x < -2$.
$\text{Dom}(g) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Problema 3: Rango de una Función Cuadrática

Enunciado: Determine el rango de $h(x) = x^2 - 4x + 7$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Solución: Completando cuadrados: $h(x) = (x^2 - 4x + 4) - 4 + 7 = (x-2)^2 + 3$.
Sabemos que $(x - 2)^2 \geq 0$ para todo x real.
Sumando 3: $(x - 2)^2 + 3 \geq 3 \implies h(x) \geq 3$.
$\text{Ran}(h) = [3, +\infty)$.

Problema 4: Prueba de la Línea Vertical Analítica

Enunciado: Demuestre algebraicamente por qué $x^2 + y^2 = 25$ no es una función $y = f(x)$.
Solución: Despejamos y: $y^2 = 25 - x^2 \implies y = \pm\sqrt{25 - x^2}$.
Para un valor válido de x, por ejemplo $x = 3$, obtenemos $y = \pm\sqrt{25 - 9} = \pm 4$.
Un solo valor de entrada ($x = 3$) produce dos salidas ($y = 4$ y $y = -4$). Falla la definición de unicidad.

Problema 5: Funciones Definidas a Trozos (Continuidad en Dominio)

Enunciado: Halle el rango de $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.
Solución: Tramo 1 ($x < 1$): Como $x < 1 \implies 2x < 2$. Su rango parcial es $(-\infty, 2)$.
Tramo 2 ($x \geq 1$): Como $x \geq 1 \implies -x \leq -1 \implies 5 - x \leq 4$. Su rango parcial es $(-\infty, 4]$.
El rango total es la unión: $(-\infty, 2) \cup (-\infty, 4] = (-\infty, 4]$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Termodinámica

Contexto: La entalpía de un gas obedece a $H(T) = \sqrt{T - 273{,}15}$, donde T es temperatura en Kelvin. Determine el dominio físico de la función.
Solución: El radicando debe ser $T - 273{,}15 \geq 0 \implies T \geq 273{,}15$. El dominio físico es $[273{,}15, +\infty)$, indicando que el modelo solo aplica para temperaturas sobre el cero absoluto Celsius.

Aplicación 2: Criptografía Cuántica

Contexto: Un algoritmo encripta estados cuánticos mediante el mapeo $C(k) = \frac{k}{k^2-1}$. Halle las claves k que rompen la función por indefinición.
Solución: La función falla si el denominador es cero. $k^2 - 1 = 0 \implies k = \pm 1$. El dominio excluye ± 1. Las claves $k = 1$ y $k = -1$ colapsan el sistema.

PROFE TEO
En modelos físicos, el dominio matemático puede ser todos los reales, pero el "dominio físico"se restringe por la lógica (tiempo positivo, masa no negativa, etc.).

Aplicación 3: Economía de Escala

Contexto: El costo marginal de manufactura es $C(q) = 100 - 0{,}5q$. Para evitar costos negativos irreales, ¿cuál es el dominio pertinente para la cantidad producida q?
Solución: La cantidad no es negativa ($q \geq 0$). Además, el costo debe ser $C(q) \geq 0 \implies 100 - 0{,}5q \geq 0 \implies q \leq 200$. El dominio pertinente es $[0, 200]$.

Aplicación 4: Dinámica Poblacional

Contexto: Un ecosistema insular soporta una biomasa dada por $P(t) = \frac{5000t}{t+10}$. Halle el límite del rango (capacidad de carga) cuando el tiempo t tiende al infinito.
Solución: Analizando el rango para $t \geq 0$: a medida que $t \to \infty$, la fracción $\frac{5000t}{t} = 5000$. El rango es $[0, 5000)$. La capacidad de carga máxima es 5000.

Aplicación 5: Óptica Geométrica

Contexto: Un rayo láser se desvía según $y = \tan(\theta)$. ¿Para qué ángulos incidentes $\theta \in [0, 2\pi]$ la función de trayectoria se indefine?
Solución: La tangente es $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$. Se indefine cuando $\cos(\theta) = 0$. En el intervalo dado, esto ocurre en $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda con argumentos lógicos, analíticos o representaciones gráficas.

1. Si el codominio de $f(x) = x^2$ es $\mathbb{R}$, y su rango es $[0, +\infty)$, explique por qué esta función no es "sobreyectivaz qué ajuste al codominio lo solucionaría.
2. Un círculo completo no pasa la prueba de la línea vertical. ¿Es posible dividir el círculo en dos ecuaciones distintas que sí sean funciones? Justifique.
3. Argumente lógicamente: ¿Puede existir una función cuyo dominio sea un solo punto $\{a\}$ y su rango sean dos puntos distintos $\{y_1, y_2\}$?
4. Explique la diferencia conceptual entre la restricción de dominio por un denominador (como $1/x$) y la restricción por un radical par (como $\sqrt{x}$).
5. Si $f(x)$ y $g(x)$ tienen el mismo dominio, ¿está garantizado que la función cociente $(f/g)(x)$ mantenga exactamente ese mismo dominio? Refute con un contraejemplo.
6. Analice la función $y = \text{sgn}(x)$ (función signo). ¿Cuál es su codominio típico y cuál es su rango exacto? ¿Por qué es una función válida?
7. Si una relación mapea cada persona del mundo a su fecha de nacimiento, ¿es esto una función matemática válida? ¿Y si mapea cada fecha de nacimiento a las personas nacidas ese día?
8. ¿Qué indica geométricamente que el rango de una función sea un único valor constante (e.g., $f(x) = 5$)?
9. En la ecuación paramétrica $x = t^2, y = t$, elimine el parámetro t y aplique la prueba de la línea vertical. ¿Qué concluye?
10. ¿Por qué la definición formal de función prohíbe que una entrada tenga múltiples salidas, pero permite perfectamente que múltiples entradas tengan la misma salida?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle el dominio de $f(x) = \frac{5}{2x-8}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica la restricción principal: El denominador _______________ ser cero.
2. Plantea la inecuación o ecuación: $2x - 8 \neq$ _____ $\implies 2x \neq$ _____ $\implies x \neq$ _____.
3. Escribe el Dominio usando notación de intervalos: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{$_____$\}$.

Problema 2. Halle el rango de $g(x) = 3x^2 + 2$.

Guía de Solución Interactiva

1. Parte del conocimiento base de los cuadrados: Sabemos que para todo x, $x^2 \geq$ _____.
2. Multiplica por la constante principal: $3x^2 \geq$ _____.
3. Suma el término independiente a ambos lados: $3x^2 + 2 \geq$ _____.
4. Conclusión en notación de intervalos: $\text{Ran}(g) = [$_____$, +\infty)$.

Problema 3. Determine el dominio de $h(x) = \sqrt{10 - 2x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Regla de los radicales pares: El interior (radicando) debe ser $\geq$ _____.
2. Plantea: $10 - 2x \geq$ _____ $\implies 10 \geq$ _____ $\implies$ _____ $\geq x$.
3. Escribe el dominio leyendo desde la x: $x \leq$ _____. $\text{Dom}(h) = (-\infty,$ _____$]$.

Problemas Generales

Problema 4. Determine el dominio de $f(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{5-x}$.

Problema 5. Halle el rango de $f(x) = |x - 3| + 1$.

PROFE TEO

Recuerda interceptar dominios cuando tienes sumas o multiplicaciones de funciones complejas.

Problema 6. Halle el dominio de $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$.

Problema 7. Indique si $y^2 - 4x = 0$ representa una función $y = f(x)$.

Problema 8. Determine el rango de $f(x) = -2(x+1)^2 + 5$.

Problema 9. Halle el dominio de $g(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$.

Problema 10. Calcule el dominio de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2-x-6}$.

Problema 11. Determine el rango de $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$.

Problema 12. Halle el dominio de $h(x) = \arcsin(2x-1)$.

Problema 13. Halle el rango de $y = \sqrt{16 - x^2}$.

Problema 14. Determine el dominio de $f(x) = \log_3(\log_2(x))$.

Problema 15. Calcule el rango de $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.

Problema 16. Halle el dominio de $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$.

Problema 17. Determine el dominio de $g(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

Problema 18. Halle el rango de $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$.

Problema 19. Determine el dominio de $f(x) = \sqrt{|x| - x}$.

Problema 20. Halle el rango de la función compuesta $f(x) = \ln(\sin(x) + 2)$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un satélite escanea un radio con cobertura modelada por $A(r) = \pi\sqrt{100 - r^2}$. Determine el dominio físico admisible para el radio r.

Guía de Solución Interactiva

1. El radio r representa una distancia real, por tanto $r \geq$ ____.
2. La raíz cuadrada exige: $100 - r^2 \geq 0 \implies r^2 \leq$ ____ $\implies -10 \leq r \leq$ ____.
3. Intersectando ambas condiciones físicas: $\mathrm{Dom}(A) = [$____, ____$]$.

Problema 2. Un ingeniero diseña una antena donde la ganancia de señal es $G(f) = 15 - (f - 2{,}4)^2$ decibeles, siendo f la frecuencia. Halle el rango máximo de ganancia.

Guía de Solución Interactiva

1. Analiza el cuadrado: $(f - 2{,}4)^2 \geq$ ____.
2. Multiplica por -1: $-(f - 2{,}4)^2 \leq$ ____.
3. Suma 15: $15 - (f - 2{,}4)^2 \leq$ ____. El valor máximo o techo del rango es ____ dB.

Problema 3. En hidroponía, el pH absorbible por una planta sigue $P(x) = \frac{10}{x-6}$. Halle el nivel de acidez x donde la absorción colapsa (falla el dominio).

Guía de Solución Interactiva

1. Una función racional colapsa si el denominador es ____.
2. Plantea la ecuación restrictiva: $x - 6 =$ ____.
3. Resuelve: $x =$ ____. El sistema colapsa si el pH es exactamente este valor.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Un dron cartografía un valle. Su altitud depende de la posición x según $h(x) = \frac{120}{\sqrt{x-5}}$. Determine el dominio de mapeo seguro.

Problema 5. El beneficio de una startup de software es $U(t) = -t^2 + 8t - 15$ en miles de dólares (t en meses). Halle el dominio de meses donde hay ganancia real ($U \geq 0$).

Problema 6. La propagación de un pulso láser en fibra óptica obedece $I(d) = 100e^{-0,1d}$. Determine el rango de intensidades posibles para distancias $d \geq 0$.

Problema 7. Un mecanismo de relojería suizo tiene un torque $T(\theta) = \arcsin\left(\frac{\theta}{4}\right)$. ¿Cuál es el dominio angular operativo permitido para θ?

Problema 8. El campo magnético de un electroimán industrial se rige por $B(I) = \log_2(I - 10)$. Encuentre el dominio de corriente I necesario para generar campo.

Problema 9. En acústica, el decaimiento de reverberación de un auditorio es $R(t) = \frac{5}{\ln(t)}$. ¿Qué instante $t > 0$ indefine el modelo por división por cero?

Problema 10. Un tren magnético consume potencia $P(v) = \frac{v^2+50}{v}$. Determine si la gráfica velocidad-potencia pasaría la prueba de la línea vertical.

Problema 11. La eficacia de un antibiótico responde a $E(D) = 100 - \frac{400}{D^2+4}$, con D la dosis. Halle el rango de eficacia máxima asintótica.

Problema 12. La presión en una turbina de gas se modela por $P(v) = \sqrt{v(10-v)}$. Halle el dominio físico de volúmenes de entrada.

Problema 13. Un sensor sismológico calibra oscilaciones mediante $S(x) = \frac{|x|}{x}$. Determine el rango exacto de las señales de salida del sensor para $x \neq 0$.

Problema 14. La radiación en un reactor se contiene según $C(r) = \frac{1}{\sqrt{49-r^2}}$. Halle el dominio radial de seguridad.

Problema 15. El costo promedio por unidad en una fábrica es $\bar{C}(x) = 20 + \frac{5000}{x}$. ¿Cuál es el límite inferior del rango a largo plazo?

Problema 16. Una trayectoria orbital de un cometa se describe por la relación $y^2 + x^2 = 30x$. ¿Es esta órbita una función matemática válida? Aplique prueba vertical.

Problema 17. Un brazo robótico articula según $\alpha(x) = \arccos(2x-3)$. Halle el dominio lineal de extensión x.

Problema 18. La tensión de un cable colgante se calcula con $T(w) = \cosh(w) = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$. Determine el rango de tensiones mínimas.

Problema 19. Un modelo meteorológico predice ráfagas mediante $V(t) = 5\sin(2t) + 12$. Halle el rango de velocidades del viento.

Problema 20. La vida útil de un panel solar frente al polvo se aproxima por $L(p) = \log(1 - p)$. ¿Qué dominio de porcentaje de polvo p mantiene activo el panel?

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$
2. $[2, +\infty)$
3. $(-\infty, 5]$
4. $[-4, 5]$
5. $[1, +\infty)$
6. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
7. No (falla prueba vertical, parábola echada).
8. $(-\infty, 5]$
9. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$
10. $[0, 3) \cup (3, +\infty)$
11. $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
12. $[0, 1]$
13. $[0, 4]$
14. $(1, +\infty)$
15. $[-0{,}5, 0{,}5]$
16. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
17. $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$
18. $(0, 1)$
19. $\mathbb{R}$
20. $[0, \ln 3]$

Propuestos de Aplicación

1. $[0, 10]$.
2. Rango máximo es 15 dB.
3. Colapsa en $x = 6$.
4. $(5, +\infty)$.
5. $[3, 5]$ meses.
6. $(0, 100]$.
7. $[-4, 4]$ radianes.
8. $I > 10$ Amperios.
9. En $t = 1$ seg (pues $\ln(1) = 0$).
10. Sí, para cada $v > 0$ hay solo un P.
11. $[0, 100)$ (asíntota en 100).
12. $[0, 10]$.
13. $\{-1, 1\}$.
14. $(-7, 7)$.
15. Límite inferior asintótico es 20.
16. No, es un círculo descentrado.
17. $[1, 2]$.
18. $[1, +\infty)$.
19. $[7, 17]$.
20. $(-\infty, 1)$ o físicamente $[0, 1)$.

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

¡Llegaste al Final!

'Conocer el dominio te dice tus límites posibles. Conocer el rango te muestra hasta dónde puedes llegar.'

- La lógica funcional

¡Felicidades! Has dominado el núcleo del precálculo. Ninguna restricción algebraica ni prueba vertical te detendrá ahora.

∞

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com