CÁLCULO DE UNA VARIABLE

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

CUADERNO DE TRABAJO

Concavidad y Puntos de Inflexión

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría Formal: La Curvatura del Cambio

Si la primera derivada nos indica hacia dónde se dirige la función (arriba o abajo), la **segunda derivada** nos revela cómo se está curvando la gráfica en su trayecto. ¿Se curva como una taza que retiene agua, o como una campana que la derrama?

1. Prueba de Concavidad

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

- Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, la gráfica de f es **cóncava hacia arriba** en I.
- Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, la gráfica de f es **cóncava hacia abajo** en I.

PROFE TEO

¡Regla de oro! Cóncava hacia arriba = forma de Ü"(la recta tangente queda por debajo). Cóncava hacia abajo = forma de "n"(la recta tangente queda por encima).

2. Puntos de Inflexión

Un punto $(c, f(c))$ en una curva continua es un **punto de inflexión** si la concavidad cambia de hacia arriba a hacia abajo, o viceversa, al pasar por c. *Condición necesaria (pero no suficiente):* Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión, entonces $f''(c) = 0$ o $f''(c)$ no existe.

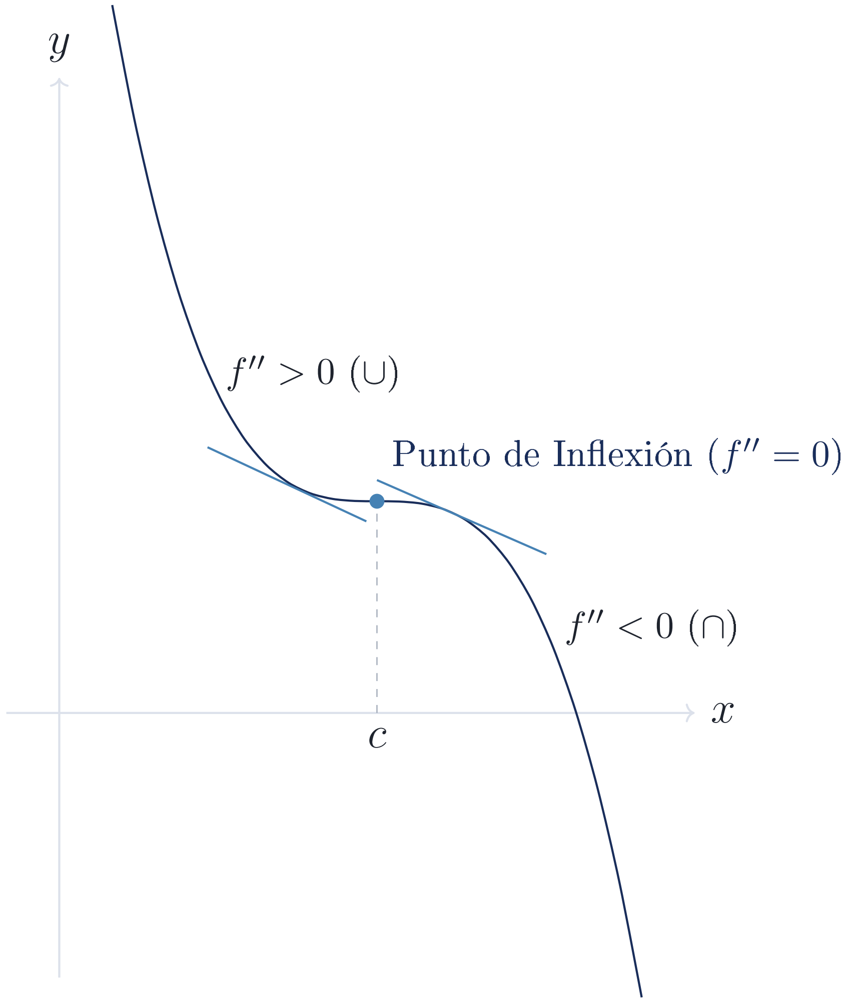
3. Criterio de la Segunda Derivada (Para Extremos)

Suponga que $f''(x)$ es continua cerca de c y que $f'(c) = 0$ (es decir, c es un número crítico).

- Si $f''(c) > 0 \implies f$ tiene un **mínimo local** en c.
- Si $f''(c) < 0 \implies f$ tiene un **máximo local** en c.
- Si $f''(c) = 0 \implies$ El criterio **no es concluyente**. (Debe usar el criterio de la primera derivada).

PROFE TEO

¡Trampa letal en exámenes! Que $f''(c) = 0$ NO garantiza que haya inflexión. Por ejemplo, en $f(x) = x^4$, $f''(0) = 0$, pero es cóncava hacia arriba en todo $\mathbb{R}$. ¡Siempre verifica el cambio de signo!


y
$f'' > 0$ $(\cup)$
Punto de Inflexión $(f'' = 0)$
$f'' < 0$ $(\cap)$
x
c

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Polinomio Clásico

Enunciado: Determine los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de $f(x) = x^4 - 4x^3$. **Solución:** Calculamos las derivadas: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$ Igualamos a cero para los candidatos a inflexión: $x = 0$ y $x = 2$. Evaluamos signos de f'':

- $(-\infty, 0) \implies f''(x) > 0 \implies$ Cóncava hacia arriba ($\cup$).
- $(0, 2) \implies f''(x) < 0 \implies$ Cóncava hacia abajo ($\cap$).
- $(2, \infty) \implies f''(x) > 0 \implies$ Cóncava hacia arriba ($\cup$).

Respuesta: Cóncava hacia arriba en $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, hacia abajo en $(0, 2)$. Puntos de inflexión en $(0, 0)$ y $(2, -16)$.

Problema Resuelto 2: Criterio en Función Racional

Enunciado: Use el criterio de la segunda derivada para clasificar los extremos de $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. **Solución:** $f'(x) = \frac{1(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$. Números críticos: $1 - x^2 = 0 \implies x = \pm 1$. Segunda derivada: $f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2)(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$. Evaluamos los críticos: $f''(-1) = \frac{-2(-2)}{8} = \frac{1}{2} > 0 \implies$ Mínimo local. $f''(1) = \frac{2(-2)}{8} = -\frac{1}{2} < 0 \implies$ Máximo local. **Respuesta:** Mínimo local en $x = -1$, Máximo local en $x = 1$.

Problema Resuelto 3: Oscilaciones Trigonométricas

Enunciado: Halle los puntos de inflexión de $f(x) = x + \sin(2x)$ en $[0, \pi]$. **Solución:** $f'(x) = 1 + 2\cos(2x)$. $f''(x) = -4\sin(2x)$. Igualamos a cero: $\sin(2x) = 0 \implies 2x = 0, \pi, 2\pi \implies x = 0, \pi/2, \pi$. En el intervalo abierto $(0, \pi)$, el único candidato es $\pi/2$. Intervalos de prueba para f'':

- $(0, \pi/2) \implies f''(x) < 0 \implies$ Cóncava hacia abajo.
- $(\pi/2, \pi) \implies f''(x) > 0 \implies$ Cóncava hacia arriba.

Respuesta: El único punto de inflexión es $(\pi/2, \pi/2)$.

PROFE TEO

En funciones trigonométricas, recuerda que la concavidad se repite en ciclos. Define bien en qué intervalo acotado estás trabajando para no dar infinitas respuestas.

Problema Resuelto 4: Inflexión con Exponente Fraccionario

Enunciado: Determine la concavidad de $f(x) = x^{5/3}$. **Solución:** $f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3}$. $f''(x) = \frac{10}{9}x^{-1/3} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$. La segunda derivada nunca es cero, pero NO EXISTE en $x = 0$. Evaluamos los signos alrededor de $x = 0$:

- Si $x < 0$, entonces $\sqrt[3]{x} < 0 \implies f''(x) < 0$ ($\cap$).
- Si $x > 0$, entonces $\sqrt[3]{x} > 0 \implies f''(x) > 0$ ($\cup$).

Como la concavidad cambia en $x = 0$ y f es continua allí, es un punto de inflexión. **Respuesta:** Cóncava hacia abajo en $(-\infty, 0)$ y hacia arriba en $(0, \infty)$. Inflexión en $(0, 0)$.

Problema Resuelto 5: Exponencial y Logaritmo

Enunciado: Clasifique los intervalos de concavidad para $f(x) = x^2 \ln x$, para $x > 0$. **Solución:** Derivamos usando regla del producto: $f'(x) = 2x \ln x + x^2(1/x) = 2x \ln x + x$. $f''(x) = [2(1)\ln x + 2x(1/x)] + 1 = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3$. Igualamos a cero: $2\ln x + 3 = 0 \implies \ln x = -3/2 \implies x = e^{-3/2}$. Analizamos los signos:

- $(0, e^{-3/2}) \implies f''(x) < 0 \implies$ Cóncava hacia abajo.
- $(e^{-3/2}, \infty) \implies f''(x) > 0 \implies$ Cóncava hacia arriba.

Respuesta: Cóncava hacia abajo en $(0, e^{-3/2})$, hacia arriba en $(e^{-3/2}, \infty)$. Inflexión en $x = e^{-3/2}$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Frenado de un Dron

Contexto: Un dron topográfico asciende verticalmente con una altitud modelada por $h(t) = -t^3 + 12t^2 + 5$ metros. Determine el instante exacto en que la aceleración se vuelve cero, marcando el momento donde deja de ganar impulso y comienza a frenar.
Solución: La aceleración es la segunda derivada de la posición. $h'(t) = -3t^2 + 24t$ (Velocidad). $h''(t) = -6t + 24$ (Aceleración). Igualamos a cero: $-6t + 24 = 0 \implies t = 4$. Como h'' cambia de positivo a negativo, es un punto de inflexión.
Respuesta: La aceleración se anula a los 4 segundos.

Aplicación 2: Propagación Epidémica

Contexto: El número total de infectados por una cepa viral en un recinto aislado crece según $N(t) = \frac{1000}{1+e^{4-t}}$. Calcule en qué día el ritmo de contagio alcanza su máxima velocidad antes de empezar a desacelerar.
Solución: El ritmo máximo de contagio ocurre en el punto de inflexión de la curva logística. $N'(t) = 1000(1 + e^{4-t})^{-2}e^{4-t}$. Calculando $N''(t)$ e igualando a cero obtenemos que el cambio de concavidad ocurre cuando el exponente $4 - t = 0 \implies t = 4$. **Respuesta:** El contagio alcanza su velocidad máxima en el día 4.

PROFE TEO

En economía, el punto de inflexión se conoce como el "Punto de Rendimientos Decrecientes". Es donde tus ganancias siguen subiendo, pero cada vez a un ritmo más lento.

Aplicación 3: Deflexión de Vigas

Contexto: Una viga metálica soporta carga pesada, curvándose según $y(x) = \frac{1}{12}x^4 - x^3 + 3x^2$ milímetros. Determine el tramo de la viga donde la curvatura invierte su sentido de deformación estructural, marcando un alto estrés de fatiga.
Solución: $y'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 6x$. $y''(x) = x^2 - 6x + 6$. Igualamos a cero usando fórmula general: $x = \frac{6\pm\sqrt{36-24}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$. La concavidad cambia de $\cup$ a $\cap$ a $\cup$. **Respuesta:** La curvatura se invierte en el tramo entre $x = 3 - \sqrt{3}$ y $x = 3 + \sqrt{3}$ metros.

Aplicación 4: Rendimientos Decrecientes

Contexto: La utilidad operativa acumulada de una planta procesadora es $U(x) = -0{,}5x^3 + 15x^2 + 100$ miles de dólares, donde x son meses. Indique el mes exacto donde inician los rendimientos marginales decrecientes corporativos.
Solución: El rendimiento decreciente inicia en el punto de inflexión (donde U'' pasa a ser negativa). $U'(x) = -1{,}5x^2 + 30x$. $U''(x) = -3x + 30$. Igualando a cero: $-3x + 30 = 0 \implies x = 10$. Para $x > 10$, $U''(x) < 0$ (cóncava hacia abajo). **Respuesta:** Los rendimientos decrecientes inician en el mes 10.

Aplicación 5: Reacción Catalítica

Contexto: La masa procesada en un reactor químico avanza según $M(t) = t^2 e^{-t/2}$ gramos. Halle el instante crítico donde la velocidad de catálisis experimenta su pico térmico más agresivo previo al agotamiento del reactivo.
Solución: El pico de velocidad es el punto de inflexión de la masa. $M'(t) = 2te^{-t/2} - \frac{1}{2}t^2 e^{-t/2} = e^{-t/2}(2t - 0{,}5t^2)$. $M''(t) = e^{-t/2}(2-t) - \frac{1}{2}e^{-t/2}(2t - 0{,}5t^2) = e^{-t/2}(0{,}25t^2 - 2t + 2)$. Igualando a cero la cuadrática: $t^2 - 8t + 8 = 0 \implies t = 4 \pm 2\sqrt{2}$. El primer pico es la inflexión ascendente. **Respuesta:** El pico agresivo ocurre a los $4 - 2\sqrt{2}$ segundos.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Analice el criterio de la segunda derivada. Si al evaluar un número crítico c obtenemos $f''(c) = 0$, ¿significa analíticamente que la función carece de un máximo o mínimo local en ese punto? Proponga un ejemplo que justifique su postura.

2. Describa la relación cinemática directa entre el punto de inflexión de una gráfica de posición $s(t)$ y la aceleración instantánea de una partícula en movimiento rectilíneo.

3. Si una función es estrictamente cóncava hacia abajo en todo su dominio, argumente si es matemáticamente posible que posea más de un máximo absoluto global.

4. Un compañero afirma que "Todo punto donde la segunda derivada se anula es forzosamente un punto de inflexión". Demuestre la falsedad de este teorema usando la función $f(x) = x^4 + 1$.

5. Analice el comportamiento de las rectas tangentes en un intervalo donde $f''(x) > 0$. ¿Por qué geométricamente todas las tangentes deben dibujarse "por debajo"de la curva principal?

6. Diferencie la aplicación del Criterio de la Primera Derivada frente al de la Segunda. ¿En qué escenarios analíticos el criterio de la segunda resulta completamente inútil o indeterminado?

7. Si la derivada primera de una función f es $f'(x) = (x-2)^2(x-4)$, deduzca la ubicación de los puntos de inflexión de f operando exclusivamente con el gradiente proporcionado.

8. Evalúe el impacto de las discontinuidades. Si una función racional cambia su concavidad de $+$ a $-$ al cruzar una asíntota vertical en $x = a$, ¿es lícito clasificar a "$a$çomo punto de inflexión formal?

9. La función logística $L(x) = \frac{L}{1+e^{-k(x-x_0)}}$ modela poblaciones. Justifique teóricamente por qué el punto de inflexión de este modelo ocurre exactamente a la mitad de su capacidad de carga máxima $L/2$.

10. Discuta el concepto de rendimientos marginales decrecientes.$^{\text{en}}$ microeconomía, relacionándolo directamente con el signo negativo de la segunda derivada en las funciones de producción corporativas.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Halle los intervalos de concavidad y puntos de inflexión de $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$.

Guía de Solución Interactiva

1. Calculamos primera y segunda derivada:
$f'(x) =$ ____________ $\implies f''(x) =$ ____________.

2. Igualamos a cero para posibles puntos de inflexión:
$12x - 18 = 0 \implies x =$ ________.

3. Evaluamos signos en intervalos $(-\infty, 1{,}5)$ y $(1{,}5, \infty)$:
Concavidad: Hacia abajo en ________, hacia arriba en ________. Inflexión en $x = 1{,}5$.

Problema 2. Use el criterio de la segunda derivada para clasificar extremos en $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$.

Guía de Solución Interactiva

1. Obtenemos números críticos igualando $f'(x)$ a cero:
$4x^3 - 4x = 0 \implies 4x(x^2 - 1) = 0 \implies x =$ ____, ____, ____.

2. Calculamos segunda derivada:
$f''(x) =$ ____________.

3. Evaluamos f'' en críticos:
$f''(0) = -4\ (< 0) \implies$ ________.
$f''(\pm 1) = 8\ (> 0) \implies$ ________.

Problema 3. Determine la concavidad de $f(x) = x \ln x$ para $x > 0$.

PROFE TEO
Si tienes logaritmos o raíces, ¡define tu dominio antes de empezar! No tiene sentido buscar un punto de inflexión en $x = -5$ si la función es $\ln(x)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Hallamos $f'(x)$ aplicando regla del producto:
$f'(x) = (1)\ln x + x(\_\_\_\_\_) = \ln x + 1$.

2. Calculamos $f''(x)$:
$f''(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$.

3. Evaluamos la concavidad para $x > 0$:
Como $1/x > 0$ siempre, la función es cóncava hacia __________ y tiene __________ puntos de inflexión.

Problemas Generales Analíticos

Problema 4. Calcule los intervalos de concavidad para $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

Problema 5. Determine los puntos de inflexión de $y = \frac{x^2}{x^2+3}$.

Problema 6. Halle los intervalos de curvatura para $f(x) = \sin x + \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

Problema 7. Derive e identifique inflexiones en la función trascendente $g(x) = e^{-x^2}$.

Problema 8. Clasifique los números críticos de $y = x^5 - 5x^4$ usando la segunda derivada.

Problema 9. Encuentre la concavidad de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ para $x > 0$.

Problema 10. Determine los puntos donde la aceleración analítica se anula en $h(t) = t^{5/3} - t$.

Problema 11. Determine los intervalos cóncavos hacia arriba para $f(x) = x^2 e^x$.

Problema 12. Obtenga el cambio de curvatura para la composición $y = \arctan(x^2)$.

Problema 13. Derive $f(x) = x^{1/3}(x+3)$ y localice exactamente sus puntos de inflexión.

Problema 14. Clasifique los extremos locales de $y = x + \frac{4}{x}$ con el criterio de segunda derivada.

Problema 15. Calcule la inflexión de la función híbrida $f(x) = e^x - x^2$.

Problema 16. Determine concavidad para la función valor absoluto transformada $g(x) = |x^3 - 1|$. (Cuidado en x=1).

Problema 17. Resuelva el operador de inflexión para $f(w) = w^2 - \ln(w^2 + 1)$.

Problema 18. Encuentre la curvatura de la curva paramétrica reducida $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

Problema 19. Pruebe analíticamente que $y = \tan x$ cambia su concavidad al cruzar el origen.

Problema 20. Halle el mínimo global e inflexiones de la ecuación térmica $f(x) = xe^{-2x^2}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La carga eléctrica residual en un capacitor de tantalio oscila siguiendo $Q(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2$ microculombios. Detecte el intervalo temporal de aceleración de carga positiva.

Guía de Solución Interactiva

1. Derivamos dos veces el flujo magnético:
$Q'(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t \implies Q''(t) = \underline{\hspace{4cm}}$. 2. Extraemos las raíces de aceleración nula:
$12(t^2 - \underline{\hspace{1.2cm}}t + \underline{\hspace{1.2cm}}) = 0 \implies t_1 = \underline{\hspace{1.2cm}}, t_2 = \underline{\hspace{1.2cm}}$. 3. Aceleración positiva $(Q'' > 0)$ operante en: $(-\infty, \underline{\hspace{1.2cm}}) \cup (\underline{\hspace{1.2cm}}, \infty)$ segundos continuos.

Problema 2. La eficiencia de aspas en un aerogenerador turbulento depende de la inclinación θ según $E(\theta) = \theta^2 - 4\theta^{1,5}$ nudos energéticos. Ubique el ángulo donde la eficiencia deja de frenar.

Guía de Solución Interactiva

1. Análisis rotacional cruzado en dos pasos:
$E''(\theta) = 2 - \underline{\hspace{2.5cm}}\theta^{-0,5} = 2 - \frac{3}{\sqrt{\theta}}$. 2. Despeje fraccionario inercial nulo:
$\frac{3}{\sqrt{\theta}} = 2 \implies \sqrt{\theta} = \underline{\hspace{1.2cm}} \implies \theta = \underline{\hspace{1.2cm}}$. 3. Transición de frenado a impulso:
El punto de inflexión se ubica en $\theta = \underline{\hspace{2.5cm}}$ radianes inclinados.

Problema 3. Una floración de algas tóxicas coloniza un lago modelada bajo $A(t) = \frac{500}{1+e^{-0,2t}}$ hectáreas. Defina el día crítico donde la velocidad de colonización alcanza su frenado expansivo máximo.

Guía de Solución Interactiva

1. Pendiente de crecimiento botánico inicial:
$A'(t) = \frac{100e^{-0,2t}}{(1+e^{-0,2t})^2}$. 2. Derivada segunda (simplificando exponente numerador):
El cambio de signo ocurre si el núcleo $1 - e^{-0,2t} = \underline{\hspace{1.2cm}}$. 3. Cúspide de infección acuática:
Despejando analíticamente, el freno sucede en $t = \underline{\hspace{2.5cm}}$ días exactos.

····▷
PROFE TEO
Problemas de crecimiento poblacional y biología (algas, bacterias) casi siempre usan curvas que forman una "S"(Sigmoidea). El punto medio de esa "S.es tu meta analítica de inflexión.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. El propulsor de un cohete suborbital inyecta plasma generando una altitud de ascenso $h(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 15t$ kilómetros. Calcule el instante donde el fuselaje sufre el mayor cambio de fuerza g vertical nula.

Problema 5. La presión hidráulica en el interior de una bomba pistón industrial rinde bajo la ecuación $P(x) = x^4 - 24x^2 + 50$ pascales operativos. Halle las tolerancias donde la fatiga estructural invierte su curvatura física de impacto.

Problema 6. La intensidad magnética de un electroimán calibrado disminuye a lo largo de su eje transversal según $B(d) = de^{-d/4}$ teslas. Identifique la distancia nanométrica que frena la caída de retención magnética.

Problema 7. El láser de mecanizado industrial perfora cristal de zafiro expandiendo temperatura calorimétrica $T(s) = \frac{\ln s}{\sqrt{s}}$ grados absolutos. Obtenga los segundos métricos que alertan la inestabilidad cóncava de fundición.

Problema 8. Las cuotas de mercado dominantes de un navegador digital oscilan en base mensual financiera $C(m) = \sin(m) - \cos(m)$ porcentajes integrales. Defina los trimestres de inflexión corporativa donde las ganancias cambian de ritmo.

Problema 9. El blindaje térmico de refrigeración líquida cuántica disipa calor mediante circuito isométrico $R(x) = \frac{1}{x^2+12}$ kelvins por placa. Establezca las dimensiones espaciales de inflexión termodinámica refrigerante extrema.

Problema 10. El amortiguamiento de la onda acústica en un estudio de sonido sordo se propaga reteniendo decibelios función nula $O(t) = t^{8/3} - 4t^{5/3}$. Detecte los picos de transición sonora muerta sorda espectral.

Problema 11. La elasticidad molecular tensora de un polímero de matriz epoxi reacciona al impacto dictando elongación $E(k) = k^3 \ln(k)$ micras. Encuentre la tracción elástica donde el plástico resiste curvatura negativa inestable.

Problema 12. El estrés de fricción cortante de una falla tectónica continental acumula energía telúrica vibratoria bajo modelo $F(d) = (d-2)^3(d+1)$ megatones. Precise las áreas telúricas donde la corteza muta su presión de ruptura.

Problema 13. La viscosidad cinemática de un fluido de perforación petrolera fluye por tubería reduciendo roce interno $V(r) = r^2 e^{-r^2}$ poises centígrados. Ubique los radios de estancamiento viscoso anular petrolífero subterráneo profundo.

Problema 14. La refracción óptica cruzando lente convexa polarizada distorsiona lumen focal $I(\alpha) = \sec(\alpha)$ dioptrías en $[-\pi/4, \pi/4]$. Argumente la curvatura de ceguera visual óptica asintótica nula reflectante diurna.

Problema 15. La absorción biométrica de un implante dérmico asimila colágeno artificial inyectado $B(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 5$. Estime concentraciones de rechazo donde tejido orgánico invierte saturación dérmica cutánea celular elástica.

Problema 16. La rentabilidad de granja criptominera escalando poder de hash procesador rinde logaritmo $R(g) = g \ln^2(g)$ dólares diarios netos. Calcule meseta de inflexión donde retorno de energía estanca beneficio minero neto servidor.

Problema 17. El casco de titanio submarino tolera presión abisal descendiendo fosa Mariana esfuerzo $P(z) = z^{5/2} - 10z^{3/2}$ atmósferas. Determine cota oceánica donde pandeo de quilla muta flexión negativa positiva.

Problema 18. La turbulencia aerodinámica perfilando nariz avión supersónico estabiliza coeficiente de arrastre $C(v) = \frac{v}{v^2+4}$ fricción sólida. Identifique velocidades operativas donde estela térmica rompe flujo laminar turbulento invertido puro extremo.

Problema 19. El pozo de potencial cuántico conteniendo partícula bosón oscila probabilidad espacial encierro nulo vibracional $W(x) = e^x \sin(x)$ onda estacionaria. Evalue transiciones de fase probables simetría subatómica cuántica en espectro $[0, \pi]$.

Problema 20. La tasa de decaimiento radiactivo cesio isotópico encapsulado bloque plomo frena fisión nuclear curva masa $M(t) = \frac{e^t}{t}$ gramos radiación. Establezca año de inflexión donde blindaje plomado decae retención atómica.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. Inflexión en $x = 1{,}5$. $\cup$ en $(1{,}5, \infty)$, $\cap$ en $(-\infty, 1{,}5)$.
2. $x = 0$ (Mín), $x = 1, -1$ (Máx) mediante segunda derivada.
3. $\cup$ en $(0, \infty)$. Cero puntos de inflexión.
4. Inflexión en $x = \pm 2/\sqrt{3}$.
5. Inflexión en $x = \pm 1$. $\cup$ en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
6. Inflexión en $3\pi/4, 7\pi/4$.
7. Inflexión en $x = \pm 1/\sqrt{2}$.
8. $x = 0$ (Inconcluyente, es inflexión), $x = 4$ (Mínimo).
9. Inflexión en $x = e^{3/2}$.
10. Nunca se anula ($f'' = \frac{10}{9}t^{-1/3}$). Inflexión en $t = 0$.
11. $\cup$ en $(-\infty, -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2}, \infty)$.
12. Inflexión en $x = \pm 1/\sqrt{3}$.
13. Inflexión en $x = 0, x = 3/2$.
14. $x = 2$ (Mín, $f'' > 0$), $x = -2$ (Máx, $f'' < 0$).
15. Inflexión donde $e^x = 2 \implies x = \ln 2$.
16. Cóncava hacia abajo en ramas reales; picos en $x = 1$.
17. Inflexión donde $\frac{2(1-w^2)}{(w^2+1)^2} = 2 \implies w = 0$.
18. $\cup$ para $x > 0$. $f''(x) = 20x^3 + 30x$.
19. $y'' = 6x - 12$. Inflexión en $x = 2$.
20. Mínimo en $x = 0{,}5 \ln 4$.

Propuestos de Aplicación

1. $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$ segundos.
2. Ángulo $\theta = 9/4 = 2{,}25$ rad.
3. Freno máximo al cruzar el $t = 0$ (inicio asintótico).
4. Impulso acelerativo nulo al cruzar $t = 4$ km.
5. Curvatura en $x = \pm 2$ pascales.
6. Cese de retención magnética en $d = 8$ nm.
7. Inestabilidad térmica forjada a los $s = e^{8/3}$ seg.
8. Trimestres en $\pi/4, 5\pi/4$ meses cíclicos.
9. Inflexión cuántica termal en $x = \pm 2$.
10. Atenuación sonora cruzando barrera $t = 1/2$.
11. Inflexión polimérica elástica a $k = e^{-5/6}$.
12. Brecha tectónica quiebre en $d = 0$ y $d = 1$.
13. Anillos de estancamiento viscoso en $r = \pm\sqrt{3/2}$.
14. $\cup$ permanente. Nunca anula $\sec\alpha(1 + 2\tan^2\alpha)$.
15. Inversión celular dérmica en $x = -1, x = 2$.
16. Inflexión en $g = e^{-1}$ (Meseta logarítmica).
17. Inversión de pandeo absoluto en $z = 3$ foso marino.
18. Ruptura de fricción laminar en $v = \pm 2\sqrt{3}$.

19. Fase de transición probabilística $x = \pi/2$.

20. Bloque fisión decae estática tras $t = 2$ años plomo.

¡La Inflexión del Éxito!

'La vida real está llena de puntos de inflexión. A veces sientes que la dificultad crece y que te estás hundiendo cóncavamente, pero es justo en ese instante cuando la segunda derivada de tu esfuerzo cambia de signo. Sigue empujando; tu curvatura está a punto de invertirse y llevarte directo al éxito.'

- La regla del cambio de concavidad

¡Enhorabuena! Has perfeccionado el análisis estructural profundo del cálculo.

$f''(x)$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com