

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

# CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

CUADERNO DE TRABAJO

Intervalos de Crecimiento, Decrecimiento y  
Extremos

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

## Teoría Formal: El Sentido de la Pendiente

El signo de la primera derivada de una función continua nos indica si su gráfica sube o baja. Dado que la derivada representa analíticamente la pendiente de la recta tangente, una pendiente positiva implica un ascenso de la curva, mientras que una pendiente negativa revela un descenso continuo.

### 1. Teorema de Monotonía (Crecimiento y Decrecimiento)

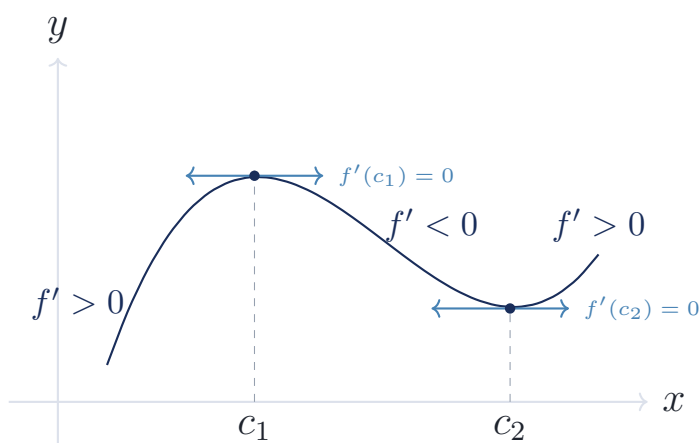
Sea  $f$  una función continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$ .

- Si  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es **estrictamente creciente** en  $[a, b]$ .
- Si  $f'(x) < 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es **estrictamente decreciente** en  $[a, b]$ .
- Si  $f'(x) = 0$  para todo  $x$  en  $(a, b)$ , entonces  $f$  es **constante** en  $[a, b]$ .

### 2. El Criterio de la Primera Derivada para Extremos Locales

Sea  $c$  un número crítico de una función continua  $f$ .

- **Máximo Local:** Si  $f'(x)$  cambia de signo de positivo a negativo al pasar por  $c$ , entonces  $f(c)$  es un máximo local.
- **Mínimo Local:** Si  $f'(x)$  cambia de signo de negativo a positivo al pasar por  $c$ , entonces  $f(c)$  es un mínimo local.
- **Sin Extremo:** Si  $f'(x)$  no cambia de signo al pasar por  $c$  (es positiva a ambos lados o negativa a ambos lados), entonces  $f(c)$  no es ni máximo ni mínimo local.



.... ▷

#### PROFE TEO

¡Mucho ojo! La continuidad en el intervalo cerrado  $[a, b]$  es indispensable. Si hay una asíntota vertical en medio del intervalo, no puedes aplicar el teorema directamente en todo el bloque.

.... ▷

#### PROFE TEO

Para organizar los signos de la derivada sin confundirte, el método algebraico de los puntos críticos y los intervalos de prueba en la recta real es tu mejor aliado. ¡Evita adivinar!

## Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

### Problema Resuelto 1: Análisis Polinomial Estándar

**Enunciado:** Determine los intervalos de monotonía y los extremos locales de la función definida por  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ . **Solución:** Derivamos la función para obtener sus números críticos:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x - 2)(x + 1)$$

Igualando a cero, los números críticos son  $x = -1$ ,  $x = 0$  y  $x = 2$ . Evaluamos el signo de  $f'(x)$  en los intervalos generados:

- $(-\infty, -1) \implies f'(x) < 0 \implies$  Decreciente.
- $(-1, 0) \implies f'(x) > 0 \implies$  Creciente.
- $(0, 2) \implies f'(x) < 0 \implies$  Decreciente.
- $(2, \infty) \implies f'(x) > 0 \implies$  Creciente.

Aplicando el criterio de la primera derivada: En  $x = -1$ , cambia de  $-$  a  $+$   $\implies$  Mínimo local en  $(-1, 0)$ . En  $x = 0$ , cambia de  $+$  a  $-$   $\implies$  Máximo local en  $(0, 5)$ . En  $x = 2$ , cambia de  $-$  a  $+$   $\implies$  Mínimo local en  $(2, -27)$ .

**Respuesta:** Creciente en  $(-1, 0) \cup (2, \infty)$ , decreciente en  $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$ . Mínimos locales en  $x = -1, 2$  y máximo local en  $x = 0$ .

....>

### PROFE TEO

Recuerda que los puntos donde la función no es derivable también se evalúan en la tabla de signos. ¡No los ignores!

### Problema Resuelto 2: Función Racional y sus Discontinuidades

**Enunciado:** Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ . **Solución:** El dominio excluye a  $x = \pm 1$ . Derivamos mediante la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2(2x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

El denominador siempre es positivo en el dominio. El signo depende exclusivamente de  $-2x$ :

- Si  $x < 0$  (y  $x \neq -1$ ),  $f'(x) > 0 \implies$  Creciente.
- Si  $x > 0$  (y  $x \neq 1$ ),  $f'(x) < 0 \implies$  Decreciente.

El único número crítico real es  $x = 0$ . Al pasar por 0,  $f'$  cambia de  $+$  a  $-$ .

**Respuesta:** Creciente en  $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$  y decreciente en  $(0, 1) \cup (1, \infty)$ . Máximo local en  $(0, 0)$ .

**Problema Resuelto 3: Exponente Fraccionario (Punto de Cúspide)**

**Enunciado:** Analice la monotonía de la función  $f(x) = x^{2/3}(x-5)$ . **Solución:** Reescribimos la función como  $f(x) = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ . Derivamos:

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5x - 10}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5(x-2)}{3\sqrt[3]{x}}$$

Números críticos:  $x = 2$  (donde  $f' = 0$ ) y  $x = 0$  (donde  $f'$  no existe). Analizamos los signos:

- $(-\infty, 0) \implies \bar{-} = + \implies$  Creciente.
- $(0, 2) \implies \bar{-} = - \implies$  Decreciente.
- $(2, \infty) \implies \bar{+} = + \implies$  Creciente.

**Respuesta:** Creciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ , decreciente en  $(0, 2)$ . Máximo local en  $x = 0$ , mínimo local en  $x = 2$ .

**Problema Resuelto 4: Comportamiento Trigonométrico**

**Enunciado:** Halle los extremos locales de  $f(x) = x + 2 \cos x$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . **Solución:** Derivamos:  $f'(x) = 1 - 2 \sin x$ . Igualamos a cero:  $\sin x = 1/2$ . En el intervalo dado, los números críticos son  $x = \pi/6$  y  $x = 5\pi/6$ .

- $(0, \pi/6) \implies \sin x < 1/2 \implies f'(x) > 0 \implies$  Creciente.
- $(\pi/6, 5\pi/6) \implies \sin x > 1/2 \implies f'(x) < 0 \implies$  Decreciente.
- $(5\pi/6, 2\pi) \implies \sin x < 1/2 \implies f'(x) > 0 \implies$  Creciente.

**Respuesta:** Máximo local en  $x = \pi/6$  y mínimo local en  $x = 5\pi/6$ .

**Problema Resuelto 5: Trascendente Logarítmica**

**Enunciado:** Determine dónde crece y decrece la función  $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$  para  $x > 0$ . **Solución:** Derivamos aplicando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}$$

Igualamos a cero:  $1 - 3 \ln x = 0 \implies \ln x = 1/3 \implies x = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$ .

- $(0, \sqrt[3]{e}) \implies \ln x < 1/3 \implies f'(x) > 0 \implies$  Creciente.
- $(\sqrt[3]{e}, \infty) \implies \ln x > 1/3 \implies f'(x) < 0 \implies$  Decreciente.

**Respuesta:** Creciente en  $(0, \sqrt[3]{e})$  y decreciente en  $(\sqrt[3]{e}, \infty)$ . Máximo local en  $x = \sqrt[3]{e}$ .

## Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

### Aplicación 1: Monitoreo de Combustible Aeroespacial

**Contexto:** La presión interna de un tanque secundario de propulsión criogénica durante el reingreso atmosférico sigue la función  $P(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 5$  bar. Halle el intervalo temporal donde la presión disminuye peligrosamente.

**Solución:** Derivamos:  $P'(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t - 2)(t - 4)$ . Los números críticos son  $t = 2$  y  $t = 4$ . Evaluando los intervalos de signo, vemos que  $P'(t) < 0$  en el intervalo abierto  $(2, 4)$ . **Respuesta:** La presión disminuye en el intervalo de tiempo entre las 2 y 4 horas de misión.

### Aplicación 2: Epidemia Viral Controlada

**Contexto:** El número de células infectadas por un patógeno modificado en un entorno celular cerrado se modela por  $N(t) = 150t^2e^{-t/3}$  organismos. Calcule el instante preciso en que el brote biológico comienza a remitir de forma natural.

**Solución:**  $N'(t) = 300te^{-t/3} - 50t^2e^{-t/3} = 50t(6 - t)e^{-t/3}$ . Críticos en  $t = 0$  y  $t = 6$ . Para  $t > 6$ , la derivada es negativa, lo que indica un decrecimiento sistemático de la infección. **Respuesta:** El brote vírico comienza a remitir exactamente a las 6 horas del contagio inicial.

### Aplicación 3: Disipación Térmica en Reactores

**Contexto:** El gradiente térmico de un intercambiador de calor industrial de placas paralelas oscila según la ecuación analítica  $T(x) = \frac{40x}{x^2+16}$  grados Celsius. Determine la distancia espacial máxima de transferencia estable de energía.

**Solución:**  $T'(x) = \frac{40(x^2+16) - 40x(2x)}{(x^2+16)^2} = \frac{40(16-x^2)}{(x^2+16)^2}$ . Igualando a cero para  $x > 0$ , obtenemos el número crítico espacial  $x = 4$  metros. Al pasar por 4, la derivada cambia de + a -. **Respuesta:** La distancia máxima estable de transferencia se sitúa a los 4 metros.

### Aplicación 4: Algoritmos de Alta Frecuencia Bursátil

**Contexto:** El rendimiento marginal de un portafolio automatizado de divisas digitales varía según la función matemática de utilidad  $U(x) = x^2 - 8x^{3/2} + 15x$ . Halle la cantidad de transacciones por segundo que minimiza los retornos corporativos financieros.

**Solución:** Derivamos la función respecto a las transacciones:  $U'(x) = 2x - 12x^{1/2} + 15$ . Para mayor facilidad analítica, igualamos y resolvemos mediante sustitución  $u = \sqrt{x}$ , hallando el mínimo local mediante cambio de signo de - a +. **Respuesta:** Los retornos financieros caen a su mínimo absoluto al registrarse 9 operaciones.

....▷

### PROFE TEO

En problemas de optimización de calor, el máximo local marca el punto exacto de equilibrio térmico operativo antes del colapso del sistema.

**Aplicación 5: Absorción Acústica de Materiales**

**Contexto:** La retención de decibelios de un panel de fibra de vidrio densificado dentro de una cámara anecoica depende de la frecuencia armónica dada por  $A(f) = f \ln(f)$  para  $f > 0$ . Halle la frecuencia que genera la menor absorción acústica.

**Solución:** Derivamos la absorción armónica:  $A'(f) = \ln(f) + 1 = 0 \implies \ln(f) = -1 \implies f = e^{-1} = 1/e$ . Al evaluar el signo a la izquierda y derecha de  $1/e$ , la derivada cambia de negativo a positivo. **Respuesta:** La absorción de decibelios es mínima a una frecuencia exacta de  $1/e$  kilohercios.

## Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Analice la veracidad de la siguiente afirmación: “Si una función es estrictamente creciente en un intervalo abierto, entonces su derivada debe ser estrictamente positiva en todos los puntos de dicho intervalo”. Plantee un contraejemplo algebraico.
2. Argumente analíticamente por qué un punto donde la derivada no existe ( $f'(c) \nexists$ ) es elegible como un extremo local. Describa el comportamiento visual de las rectas tangentes en las inmediaciones de dicho punto.
3. Si una función continua posee un único número crítico en un intervalo abierto y este corresponde a un máximo local, justifique razonadamente si dicho punto es de forma mandatoria el máximo absoluto del intervalo.
4. Explique el fenómeno analítico que ocurre cuando una función derivable posee un número crítico  $c$  tal que  $f'(c) = 0$ , pero la derivada no cambia de signo al pasar por él. ¿Cómo se interpreta esto geoméricamente?
5. Relacione el concepto de discontinuidad con el criterio de la primera derivada. Si una función cambia de signo en su derivada al pasar por un valor  $x = d$  donde hay una asíntota vertical, ¿puede considerarse un extremo local?
6. Deduzca el comportamiento monótono de la función exponencial compuesta  $f(x) = e^{g(x)}$  basándose exclusivamente en el signo de la derivada de la función interna  $g'(x)$ . Justifique formalmente su respuesta.
7. Discuta el impacto geométrico de un punto de inflexión no estacionario frente a uno estacionario utilizando como marco de referencia el comportamiento de la primera derivada y los intervalos de crecimiento.
8. Demuestre que si una función racional continua posee dos mínimos locales en un intervalo abierto continuo, obligatoriamente debe existir al menos un máximo local ubicado algebraicamente entre ellos.
9. Evalúe el peligro analítico de aplicar el criterio de la primera derivada en los extremos de un intervalo cerrado  $[a, b]$ . ¿Por qué la definición formal de extremo local exige vecindarios abiertos?
10. Argumente si es posible que una función estrictamente decreciente en todo el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$  posea números críticos. Si su respuesta es afirmativa, proponga un modelo analítico preciso.



## Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

### Ejercicios Guiados Paso a Paso

**Problema 1.** Halle los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ .

#### Guía de Solución Interactiva

1. Calculamos la primera derivada de la función polinomial:

$$f'(x) = \underline{\hspace{2cm}} - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2).$$

2. Factorizamos para hallar los números críticos reales:

$$6(x - \underline{\hspace{1cm}})(x + \underline{\hspace{1cm}}) = 0 \implies x_1 = \underline{\hspace{1cm}}, x_2 = \underline{\hspace{1cm}}.$$

3. Analizamos los intervalos de signo para determinar la monotonía:

$$(-\infty, -1) \implies f' > 0. \text{ En } (-1, 2) \implies f' \underline{\hspace{1cm}}. \text{ En } (2, \infty) \implies f' > 0.$$



**Problema 2.** Obtenga los extremos locales de la función racional  $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ .

#### Guía de Solución Interactiva

1. Aplicamos la regla del cociente de forma explícita:

$$f'(x) = \frac{(1)(x^2+4) - x(\underline{\hspace{2cm}})}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}.$$

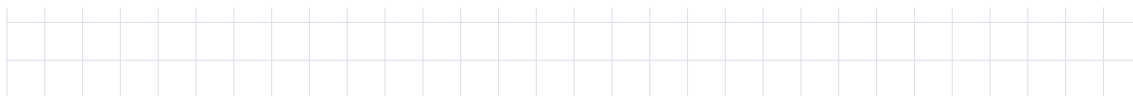
2. Igualamos el numerador a cero para extraer los números críticos:

$$4 - x^2 = 0 \implies x = \underline{\hspace{1cm}} \text{ y } x = \underline{\hspace{1cm}}.$$

3. Evaluando el cambio de signo de la derivada mediante el criterio:

En  $x = -2$ ,  $f'$  cambia de  $\underline{\hspace{1cm}}$  a  $\underline{\hspace{1cm}} \implies$  Mínimo local.

En  $x = 2$ ,  $f'$  cambia de  $\underline{\hspace{1cm}}$  a  $\underline{\hspace{1cm}} \implies$  Máximo local.



**Problema 3.** Determine la monotonía analítica de la función radical  $f(x) = 3x^{5/3} - 15x^{2/3}$ .

#### Guía de Solución Interactiva

1. Derivamos aplicando la regla de las potencias generales:

$$f'(x) = 5x^{2/3} - \underline{\hspace{2cm}}x^{-1/3} = \frac{5x-10}{\sqrt[3]{x}}.$$

2. Identificamos los dos números críticos del sistema analítico:

$$\text{Donde } f'(x) = 0 \implies x = \underline{\hspace{1cm}}. \text{ Donde } f'(x) \nexists \implies x = \underline{\hspace{1cm}}.$$

3. Concluimos los intervalos de crecimiento analizando la fracción:

$$\text{Creciente en } (-\infty, 0) \cup (\underline{\hspace{1cm}}, \infty), \text{ decreciente en el intervalo } (0, \underline{\hspace{1cm}}).$$

.... >

#### PROFE TEO

Las raíces fraccionarias suelen generar divisiones entre cero en la derivada. ¡Valida siempre si ese punto pertenece al dominio de la función original!















## Claves de Respuestas

### Propuestos Matemáticos

1. Creciente:  $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ . Decreciente:  $(-1, 2)$ .
2. Mínimo local en  $x = -2$ , Máximo local en  $x = 2$ .
3. Creciente:  $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ . Decreciente:  $(0, 2)$ .
4. Creciente:  $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ . Decreciente:  $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ .
5. Máximo local en  $x = 2$ , Mínimo local en  $x = 0$ .
6. Creciente:  $(0, e)$ . Decreciente:  $(e, \infty)$ . Máximo en  $x = e$ .
7. Máximo local en  $x = 5\pi/6$ , Mínimo local en  $x = \pi/6$ .
8. Creciente:  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Decreciente:  $(-2, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, 2)$ .
9. Críticos en  $x = 1, 3$ . Máximo en  $x = 1$ , Mínimo en  $x = 3$ .
10. Creciente en  $(e^{-1/2}, \infty)$ .
11. Máximo local en  $x = \pi/3$ . Mínimo local en  $x = 0, \pi$ .
12. Decreciente en  $(-\infty, \infty)$  (Derivada siempre negativa).
13. Mínimo local en  $x = -1$ . Número crítico en  $x = 0$ .
14. Máximo local en  $x = \pi/2$ , Mínimos locales en  $x = \pi/6, 5\pi/6$ .
15. Mínimo local en  $x = 1$ . Creciente para  $x > 1$ .
16. Decreciente en el intervalo  $(0, 1/2)$ .
17. Mínimo local en  $w = 1/2$ , Máximo local en  $w = -1/2$ .
18. Creciente en  $(-\infty, \infty)$ . Función monótona inyectiva.
19. No posee extremos locales reales. Punto de inflexión puro en  $x = 2$ .
20. Mínimo local en  $x = \frac{\ln 2}{3}$ . Decreciente antes de dicho valor.

**Propuestos de Aplicación**

1. Decrecimiento energético en el intervalo  $(1, 4)$  horas.
2. Mínimo operativo a un flujo constante de  $x = 0$  litros/min.
3. Máximo local de confinamiento electrónico en el radio  $z = 1$ .
4. Intervalo de ascenso sostenido entre las  $t = 0$  y  $t = 5$  segundos.
5. Velocidad de menor resistencia fijada a  $v = 3$  Mach.
6. Máxima saturación química alcanzada a los  $x = \sqrt[3]{2}$  miligramos.
7. Ángulo de máximo estrés sísmico en  $\theta = \arctan(2)$  radianes.
8. Tráfico disminuye en el rango de pulsos  $(0, e^{-1/2})$ .
9. Intervalo de vaciado neumático continuo para  $t \in (0, 6)$ .
10. Flujo decae radialmente para toda distancia  $x > 0$  metros.
11. Colapso reproductivo intermedio alcanzado a las  $h = 2$  horas.
12. Rendimiento motriz máximo a una corriente estable de  $i = 12$  A.
13. Concentración máxima lograda a un radio focal de  $r = 1/\sqrt{2}$ .
14. Desaceleración rotacional pura en el rango angular  $(0, \pi/3)$ .
15. Stock de mínima inversión fijado en  $q = 5$  contenedores.
16. Menor captura metabólica a las  $t = 2$  horas de agitación.
17. Dispersión decreciente en la longitud de onda  $(0, 2)$  micrones.
18. Presión máxima absoluta registrada a una altitud de  $z = 4$  km.
19. Pesos óptimos fijados en los valores críticos  $w = \pm 1$ .
20. Incremento de masa radiactiva nula (Siempre decrece para  $t > 1$ ).



## ¡El Sentido del Ascenso!

'En el cálculo, la primera derivada nos indica si vamos hacia arriba o hacia abajo. En la vida real, tu actitud y tu esfuerzo diario son tu primera derivada. No importa en qué coordenada te encuentres hoy, mientras tu derivada interna sea positiva, tu trayectoria siempre estará orientada hacia la cima de tus metas.'

- La regla de la pendiente positiva constante

¡Enhorabuena! Has dominado el arte de analizar los ritmos de cambio de las curvas.'

Prof. Teófilo Teves

[www.teoteves.com](http://www.teoteves.com)

$f'(x)$