CÁLCULO DE UNA VARIABLE

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

CUADERNO DE TRABAJO

Definición Límite en un Punto e Intervalo

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Trazo Sin Interrupciones

Intuitivamente, una función es continua si podemos dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel. Sin embargo, en cálculo superior necesitamos una definición rigurosa basada en el concepto de **límite**.

PROFE TEO

¡Ojo! La continuidad no es una opinión. Para afirmar que una función es continua en un punto, debes verificar **tres** condiciones estrictas. Si falla una, falla todo.

1. Continuidad en un Punto

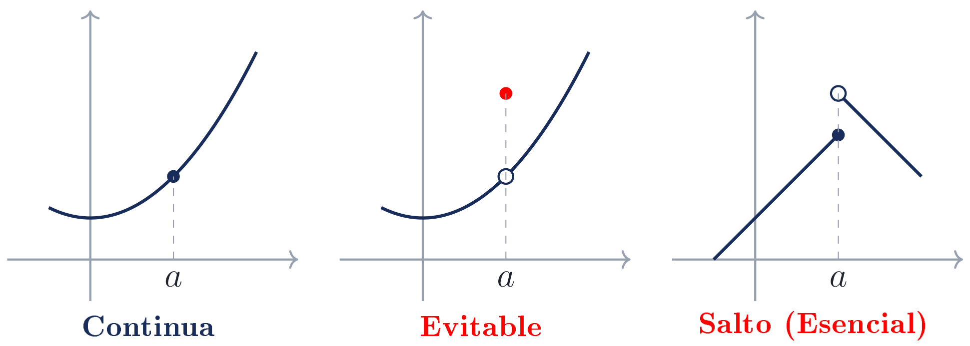
Una función f es **continua en un número** a si se cumplen simultáneamente las siguientes tres condiciones:

1. $f(a)$ está definida (el punto a pertenece al dominio de f).
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (los límites laterales son iguales).
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (el límite coincide con el valor de la función).

2. Continuidad en un Intervalo

- Una función es continua en un **intervalo abierto** (a, b) si es continua en cada número del intervalo.
- Una función es continua en un **intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en (a, b) y además posee continuidad lateral en los extremos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$$



PROFE TEO

Las discontinuidades pueden ser *evitables* (un simple hueco que puedes rellenar) o *esenciales* (saltos bruscos o asíntotas donde no hay salvación).

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Análisis de las Tres Condiciones

Enunciado: Determine si $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ es continua en $x = 3$.
Solución: Evaluamos las 3 condiciones de continuidad en $x = 3$: 1. $f(3) = \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{0}{0}$. ¡Indeterminado! $f(3)$ no existe. Al fallar la primera condición, concluimos automáticamente que la función es **discontinua** en $x = 3$. (Es una discontinuidad evitable porque el límite sí existe y vale 6).

Problema Resuelto 2: Hallar Constantes para Continuidad

Enunciado: Halle el valor de k para que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$: $f(x) = \{kx^2 \text{ si } x \leq 2\,;\, 2x + k \text{ si } x > 2\}$.
Solución: El punto crítico es $x = 2$. Forzamos a que los límites laterales sean iguales a $f(2)$. $f(2) = k(2)^2 = 4k$. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(kx^2) = 4k$. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(2x + k) = 4 + k$. Igualamos laterales: $4k = 4 + k \implies 3k = 4 \implies k = 4/3$.

PROFE TEO

Las funciones a trozos son las reinas de los exámenes. Para que sean continuas en el punto de quiebre, ¡obligatoriamente sus límites laterales deben coincidir!

Problema Resuelto 3: Continuidad con Valor Absoluto

Enunciado: Clasifique la discontinuidad de $f(x) = \frac{|x|}{x}$ en $x = 0$.
Solución: 1. $f(0)$ no está definida (división por cero). 2. Límites laterales: Por la derecha ($x > 0$): $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$. Por la izquierda ($x < 0$): $\lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$. Como $1 \neq -1$, el límite no existe. Es una **discontinuidad de salto** (esencial).

Problema Resuelto 4: Asíntotas como Discontinuidad

Enunciado: Analice la continuidad de $h(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$ en $x = 4$.
Solución: 1. $h(4)$ no existe ($1/0$). 2. Evaluamos el límite: $\lim_{x\to 4} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty$. Al ser el límite infinito, la gráfica presenta una asíntota vertical. Se clasifica como una **discontinuidad infinita** (esencial).

Problema Resuelto 5: Continuidad en Intervalo Cerrado

Enunciado: Demuestre que $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ es continua en $[-3, 3]$.
Solución: El dominio de la raíz requiere $9 - x^2 \geq 0 \implies x \in [-3, 3]$. En cualquier $c \in (-3, 3)$, $\lim_{x\to c} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - c^2} = f(c)$ (Continua en el abierto). Extremo izquierdo: $\lim_{x\to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = 0 = f(-3)$. Extremo derecho: $\lim_{x\to 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0 = f(3)$. Como cumple en el interior y lateralmente en las fronteras, es continua en $[-3, 3]$.

PROFE TEO

Para verificar la continuidad en un intervalo cerrado $[a, b]$, no olvides que en los extremos a y b solo te puedes acercar por adentro del intervalo.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Tarifas Eléctricas

Contexto: El cobro en dólares por kilovatio hora es $C(x) = \{10x \text{ si } x \leq 50\,;\, 15x - 250 \text{ si } x > 50\}$. Determine si el salto a la tarifa superior genera un cobro abrupto o continuo al rebasar los 50 kWh.
Solución: Lateral izquierdo (límite base): $\lim_{x\to 50^-} 10(50) = 500$. Lateral derecho (excedente): $\lim_{x\to 50^+} 15(50) - 250 = 750 - 250 = 500$. **Respuesta:** El cobro es matemáticamente continuo. No hay salto económico abrupto.

Aplicación 2: Resistencia de Materiales

Contexto: La deformación de una viga obedece a $D(F) = \frac{F^2-16}{F-4}$ milímetros para fuerza F. El sensor falla en $F = 4$ N. Indique la deformación exacta en ese punto para re-calibrar el software mediante continuidad evitable.
Solución: El límite define la continuidad removible: $\lim_{F\to 4} \frac{(F-4)(F+4)}{F-4}$. Cancelando la indeterminación, nos queda $\lim_{F\to 4}(F + 4) = 8$. **Respuesta:** Se debe re-calibrar el software asignando 8 milímetros.

Aplicación 3: Dinámica de Poblaciones

Contexto: Un ecosistema bacteriano crece según $P(t) = \{5t^2 \text{ si } t < 2\,;\, 50 - t \text{ si } t \geq 2\}$, donde en $t = 2$ horas se inyecta antibiótico. Analice si la transición poblacional sufre un colapso brusco discontinuo.
Solución: Población antes del antibiótico: $\lim_{t\to 2^-} 5(2)^2 = 20$. Población al inyectar: $\lim_{t\to 2^+}(50 - 2) = 48$. **Respuesta:** Existe un salto de 20 a 48, revelando una discontinuidad esencial.

Aplicación 4: Tasa de Reacción Química

Contexto: La velocidad de catálisis marca $V(c) = \frac{|c-3|}{c-3}$ mg/s. Determine la naturaleza continua de la velocidad enzimática justo cuando la concentración molar de sustrato cruza el umbral crítico de saturación en $c = 3$.
Solución: Lateral derecho ($c > 3$): $\lim_{c\to 3^+} \frac{c-3}{c-3} = 1$. Lateral izquierdo ($c < 3$): $\lim_{c\to 3^-} \frac{-(c-3)}{c-3} = -1$. **Respuesta:** Presenta discontinuidad de salto. La velocidad colapsa abruptamente de 1 a -1.

····▷
PROFE TEO
¡Siempre que un fenómeno físico sufra un impacto, ruptura o intervención instantánea, espera que la función modelada pierda su continuidad!

Aplicación 5: Corrección de Órbita

Contexto: La altitud de un satélite se modela por $A(t) = \{100 + t \text{ si } t < 10\,;\, kt^2 \text{ si } t \geq 10\}$. Halle el valor de k para garantizar que el encendido del propulsor sea mecánicamente continuo.

Solución: Altitud previa: $\lim_{t\to 10^-} 100 + 10 = 110$. Altitud de impulso: $\lim_{t\to 10^+} k(10)^2 = 100k$. Igualando para asegurar continuidad: $100k = 110 \implies k = 1{,}1$. **Respuesta:** La constante del propulsor debe ser exactamente 1,1.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Si evaluamos $\lim_{x\to a} f(x)$ y obtenemos un valor real, pero resulta que $f(a)$ no existe en el dominio, ¿qué tipo de discontinuidad se presenta y cómo se repara?
2. Argumente por qué una función polinómica de grado n jamás presentará discontinuidades de salto en toda la extensión de su dominio real.
3. Describa la diferencia fundamental en el comportamiento de una curva alrededor de un "hueco removible"versus una asíntota vertical.
4. Si se tiene una función a trozos donde $\lim_{x\to c^-} f(x) = 5$ y $\lim_{x\to c^+} f(x) = 2$, ¿es posible redefinir $f(c)$ para obligar a la función a ser continua? Justifique.
5. Analice la función $f(x) = \sqrt{x}$. ¿Por qué afirmamos que es continua en el intervalo cerrado $[0, \infty)$ si el límite por la izquierda $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ ni siquiera existe?
6. Un compañero afirma que "si una función es continua en un intervalo abierto (a, b), automáticamente lo será en el cerrado $[a, b]$ ". Construya un contraejemplo para refutarlo.
7. ¿Por qué la existencia de los límites laterales es un prerrequisito obligatorio antes de poder confirmar la continuidad de una función con valor absoluto en su vértice?
8. Visualice la gráfica de la función parte entera $\lfloor x \rfloor$. Explique lógicamente el origen de sus infinitas discontinuidades esenciales.
9. Si la función precio de una criptomoneda experimenta un "flash crash"(caída y recuperación instantánea en un segundo), ¿con qué tipo de discontinuidad matemática lo modelaría?
10. El Teorema del Valor Intermedio exige que una función sea estrictamente continua en $[a, b]$. ¿Qué pasaría con las raíces de una función si se omitiera esta condición indispensable?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Determine si $f(x) = \frac{x^2-25}{x-5}$ es continua en $x = 5$. Si no lo es, clasifique.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos la función: $f(5) = \frac{\_\_\_\_}{\_\_\_\_}$, lo que significa que la imagen __________.
2. Evaluamos el límite: $\lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(\_\_\_\_\_\_)}{x-5} = \_\_\_\_\_$.
3. Como el límite __________ pero la imagen no, es una discontinuidad __________.

Problema 2. Halle a para que $g(x) = \{3x - a \text{ si } x \leq 2\,;\, x^2 \text{ si } x > 2\}$ sea continua.

Guía de Solución Interactiva

1. Límite izquierdo y valor en el punto: $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3(\_\_\_\_\_) - a = \_\_\_\_\_\_\_$.
2. Límite derecho: $\lim_{x\to 2^+} g(x) = (\_\_\_\_\_)^2 = \_\_\_\_\_$.
3. Igualamos ambos laterales: $6 - a = 4 \implies a = \_\_\_\_\_$.

Problema 3. Analice los puntos de discontinuidad de $h(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$.

Guía de Solución Interactiva

1. El denominador se hace cero cuando $x^2 - 4 = 0$, es decir en $x = \_\_\_\_\_$ y $x = \_\_\_\_\_$.
2. En $x = -2$, el límite da forma $0/0$, por lo que hay una discontinuidad __________.
3. En $x = 2$, el límite da forma $4/0$ (infinito), por lo que hay una discontinuidad __________.

PROFE TEO

Las fracciones racionales siempre se rompen donde el denominador es cero. ¡Iguala el denominador a cero para cazar las discontinuidades rápidamente!

Problemas Generales Analíticos

Problema 4. Analice la continuidad de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ en $x = 1$.

Problema 5. Determine el punto de discontinuidad de $f(x) = \frac{1}{x+3}$ y clasifíquelo.

Problema 6. Redefina $f(3)$ para que $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ sea continua en $x = 3$.

Problema 7. Halle los valores que hacen discontinua a $y = \frac{x}{x^2-x-6}$.

Problema 8. Para $f(x) = \{ax+3 \text{ si } x < 1\,;\, 5 \text{ si } x = 1\,;\, x^2 - a \text{ si } x > 1\}$, ¿existe un .ª"que la haga continua?

Problema 9. Estudie la continuidad de $f(x) = \frac{|x-4|}{x-4}$ en todo su dominio.

Problema 10. Determine si $f(x) = \lfloor x \rfloor + 1$ es continua en $x = 2{,}5$.

Problema 11. Analice la continuidad de $h(x) = e^{-1/x^2}$ en $x = 0$, asumiendo $h(0) = 0$.

Problema 12. Halle "k"para que sea continua: $f(x) = \{\frac{\sin(kx)}{x} \text{ si } x < 0\,;\, 3x + k^2 \text{ si } x \geq 0\}$.

Problema 13. Analice si $y = \sec(x)$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$.

Problema 14. Clasifique las discontinuidades de $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$.

Problema 15. Determine çz "d"para que $f(x) = \{2 \text{ si } x \leq -1\,;\, cx + d \text{ si } -1 < x < 3\,;\, -2 \text{ si } x \geq 3\}$ sea continua.

Problema 16. Demuestre si $f(x) = x \sin(1/x)$ (con $f(0) = 0$) es continua en $x = 0$.

Problema 17. Halle los puntos de ruptura de $f(x) = \ln(x^2 - 1)$.

Problema 18. Clasifique la discontinuidad en $x = 0$ de $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Problema 19. Estudie la continuidad en $[-2, 2]$ de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Problema 20. Analice la continuidad esencial de la función de Dirichlet: $f(x) = \{1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}\,;\, 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}\}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un brazo robótico automotriz aplica un torque calibrado como $T(\theta) = \frac{\theta^2-\pi^2}{\theta-\pi}$. Reprograme el software de ensamblaje asignando el valor continuo exacto al motor cuando el ángulo rotacional θ alcanza el nivel pi.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos la falla de software: $T(\pi) = \frac{\_\_\_\_\_}{\_\_\_\_\_}$, una discontinuidad evitable. 2. Factorizamos el torque: $\lim_{\theta\to\pi} \frac{(\theta-\pi)(\_\_\_\_\_)}{\theta-\pi}$. 3. Simplificamos y evaluamos.

El nuevo valor asignado debe ser _____.

Problema 2. La dilatación de una aleación de titanio obedece a $E(t) = \{2t \text{ si } t \leq 5\,;\, t + c \text{ si } t > 5\}$. Determine la constante de aleación residual c para evitar fisuras por expansión asimétrica.

Guía de Solución Interactiva

1. Límite térmico inferior en $t = 5$: $2(\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$. 2. Límite térmico superior: $(\_\_\_\_\_) + c = \_\_\_\_\_$. 3. Empalmando ambas funciones para prevenir fracturas, $c = \_\_\_\_\_$.

Problema 3. Una red de fibra óptica modula el ancho de banda $B(s) = \frac{|s-10|}{s-10}$. Clasifique el tipo de caída de señal que experimenta la matriz principal de servidores si el pulso sincrónico cruza el décimo milisegundo.

Guía de Solución Interactiva

1. Límite previo al pulso ($s \to 10^-$): arroja un valor de _____. 2. Límite posterior ($s \to 10^+$): arroja un valor de _____. 3. La discrepancia indica una interrupción clasificada como discontinuidad de _______.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. El caudal de presión en una represa hidroeléctrica se define por $P(v) = \frac{v^2-100}{v-10}$. El flujómetro se apaga en $v = 10$. Recalibre el instrumento estableciendo la presión virtual continua para evadir alertas de compuertas.

Problema 5. La descarga de un dron forestal desciende según $B(t) = \{100 - 2t \text{ si } t \leq 20\,;\, 80 - t \text{ si } t > 20\}$. Analice matemáticamente si el switch de ahorro de batería sufre un apagón instantáneo discontinuo.

Problema 6. La titulación de ácidos en laboratorio reacciona variando su acidez $A(x) = \frac{x-7}{|x-7|}$. Demuestre qué alteración química abrupta experimenta la probeta exactamente al atravesar el factor neutro pH siete hacia el umbral alcalino.

Problema 7. El balance de tráfico de un servidor web distribuye paquetes $P(c) = \frac{c^2+c-2}{c-1}$. Si el puerto uno colapsa reportando división por cero, reestablezca el flujo de datos aplicando un parche de conectividad continua.

Problema 8. Una cámara de resonancia acústica absorbe decibelios marcando $A(w) = \{w^2 + k \text{ si } w < 3\,;\, 4w \text{ si } w \geq 3\}$. Sintonice el aislante sonoro k para que las frecuencias bajas fluyan ininterrumpidas sin generar ecos perjudiciales.

Problema 9. El proceso de congelación criogénica estabiliza tejidos vivos evaluados mediante $T(m) = \frac{1}{(m-5)^2}$. Identifique la falla termodinámica crítica que destroza las membranas celulares en el quinto minuto cronometrado exacto de enfriamiento extremo.

Problema 10. Un isótopo radiactivo sufre una anomalía de decaimiento gamma $R(t) = \frac{\sin(t-\pi)}{t-\pi}$. Determine la radiación de fuga remanente estableciendo el valor curativo constante donde la lectura del contador Geiger arroja una indeterminación física.

Problema 11. La fricción de placas tectónicas genera acumulación de energía $E(d) = \{d^3 \text{ si } d \leq 2\,;\ ad+b \text{ si } d > 2\}$. Formule una ecuación para aislar las variables geológicas que previenen temblores de salto discontinuo.

Problema 12. La enzima digestiva cataliza el sustrato celular con una aceleración $C(x) = x\lfloor x \rfloor$. Compruebe el colapso gástrico metabólico evaluando la discontinuidad esencial absorbida al traspasar la barrera biológica entera de los dos miligramos.

Problema 13. El flujo termal de un géiser volcánico se proyecta disparando $F(p) = \frac{p^2-25}{p^2-5p}$. Reconfigure la sonda térmica del cráter tapando el bache analítico de presión superficial sin alterar la zona de ruptura subterránea.

Problema 14. Los nanotubos de carbono toleran estrés de tracción modelado por $\sigma(e) = \{e+3 \text{ si } e \leq 0\,;\ \frac{e^2+3e}{e} \text{ si } e > 0\}$. Validar si el polímero sintético asegura resistencia continua ante tensiones nulas de laboratorio.

Problema 15. La probabilidad de tunelamiento cuántico en microchips cae $P(v) = \frac{\tan(v-1)}{v-1}$. Fije la probabilidad límite de conductancia de electrones cuando el voltaje estabilizado de la placa base roza la unidad de voltio absoluta.

Problema 16. El disyuntor automático de Wall Street detiene transacciones $T(i) = \{10i \text{ si } i < 5\,;\ 50 \text{ si } i = 5\,;\ 2i^2 \text{ si } i > 5\}$. Audite si existe continuidad financiera al reabrir el mercado bursátil intervenido.

Problema 17. Un submarino militar emite frecuencias de sonar encriptadas $S(f) = \frac{1-\cos(f)}{f^2}$. Garantice el sigilo oceánico calibrando el receptor acústico interno para sellar el hueco de detección originado en la frecuencia base submarina cero.

Problema 18. La congestión de tráfico en la autopista metropolitana frena vehículos según $V(c) = e^{-1/|c-3|}$. Testee la fluidez de la carretera asumiendo que un bloqueo total en el tercer kilómetro se despeja restituyendo marcha ininterrumpida.

Problema 19. Los paneles solares fotovoltaicos rinden voltaje $E(l) = \frac{\sqrt{l+4}-2}{l}$. Asegure la red eléctrica acoplando un inversor que parchee la deficiencia de generación energética producida bajo la sombra total de un eclipse astronómico.

Problema 20. El escudo aerodinámico de una cápsula espacial fricciona calor $Q(a) = \frac{a^3-1}{|a-1|}$. Proyecte el daño estructural térmico provocado por la fricción asimétrica lateral desgarrando el fuselaje reentrando la nave cruzando la estratosfera terrestre.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. Evitable. El límite es 10.
2. $a = 2$.
3. Evitable en -2, infinita en 2.
4. Continua. $f(1) = -2$.
5. Discontinua infinita en $x = -3$.
6. $f(3) = 6$.
7. $x = 3$ y $x = -2$.
8. No. En $x = 1$ laterales son distintos a 5.
9. Discontinua esencial (salto) en $x = 4$.
10. Continua. Límite $= 3$.
11. Continua. Límite es 0.
12. $k = 0$ o $k = 1$.
13. Discontinua en $\pi/2$ (Infinita).
14. Evitables en $x = 1$ y $x = -1$.
15. $c = -1$, $d = 1$.
16. Continua (por Sándwich da 0).
17. Dominio $|x| > 1$. No definida en $[-1, 1]$.
18. Evitable. Redefinir $f(0) = 1/2$.
19. Continua en todo el intervalo cerrado.
20. Discontinua esencial en todo $\mathbb{R}$.

Propuestos de Aplicación

1. 2π.
2. $c = 5$.
3. Salto. (-1 a 1).
4. 20 presión virtual.
5. Salto de 60 a 60 (¡Es continuo!).
6. Salto pH (-1 a 1).
7. Parche de valor 3.
8. $k = 3$.
9. Discontinuidad infinita en $m = 5$.
10. Radiación de 1.
11. Ecuación: $2a + b = 8$.
12. Salto gástrico de 2 a 4.
13. Sonda en 2 (Hueco en 5).
14. Continua. Límite 3 ambos lados.
15. Probabilidad de 1.
16. Es continua en todo punto.
17. Sellar hueco con valor $1/2$.
18. Continua, límite es 0.
19. Parche de valor $1/4$.
20. Salto térmico de -3 a 3.

$[a, b]$

¡Flujo Ininterrumpido!

'La vida, al igual que las funciones matemáticas, puede presentar fracturas o huecos imprevistos. Pero con el cálculo adecuado, siempre podemos redefinir nuestro camino y recuperar la continuidad.'

- La resiliencia del cálculo diferencial

¡Felicidades! Has dominado el concepto de continuidad. Tienes las herramientas analíticas para trazar caminos sin interrupciones.

$\neq$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com