PRECÁLCULO

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

CUADERNO DE TRABAJO

Definición, evaluación y dominio de $(f \circ g)(x)$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Funciones dentro de Funciones

Componer funciones es como una línea de ensamblaje en una fábrica. La salida (resultado) de la primera máquina se convierte inmediatamente en la entrada (materia prima) de la segunda máquina.

1. Definición Formal de Composición

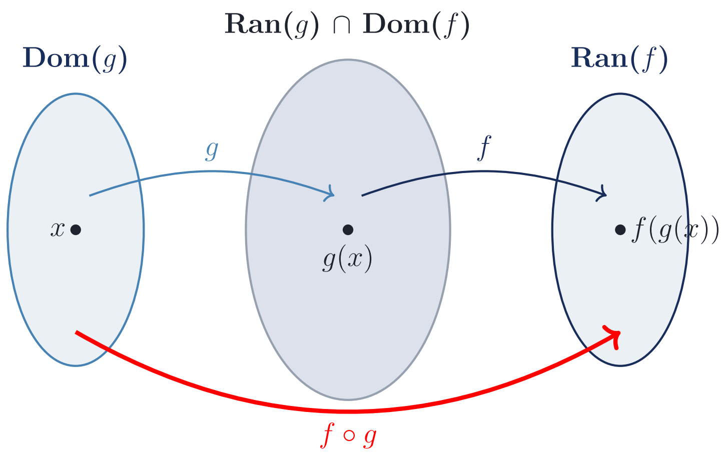
Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (léase "f compuesta con g.º "f de g") se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Aquí, g es la función **interior** (la primera en actuar sobre x) y f es la función **exterior** (la que actúa sobre el resultado de g).

PROFE TEO

Recuerda: la composición NO es conmutativa. Casi siempre $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Importa muchísimo quién va adentro y quién va afuera.



2. Determinación del Dominio

El dominio de $(f \circ g)(x)$ no es simplemente el dominio de la fórmula final. Es el conjunto de todas las x que cumplen **dos condiciones simultáneas**:

1. x debe pertenecer al dominio de la función interior g. (Es decir, x debe poder entrar a la primera máquina).
2. El resultado $g(x)$ debe pertenecer al dominio de la función exterior f. (Es decir, la salida de la primera máquina no debe romper la segunda).

Simbólicamente: $\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) \mid g(x) \in \text{Dom}(f)\}$

PROFE TEO

¡El error más grave en los exámenes! Al calcular el dominio final, la mayoría halla $f(g(x))$, la simplifica, y luego saca el dominio. ¡NO! Si simplificas, pierdes restricciones originales. Evalúa el dominio ANTES de simplificar.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Composición Polinómica

Enunciado: Sean $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 1$. Halle $(f \circ g)(x)$.
Solución: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 1)$.
Sustituimos $(2x - 1)$ en cada x de la función f:
$= (2x - 1)^2 + 3$.
Desarrollamos el binomio: $4x^2 - 4x + 1 + 3$.
Resultado: $4x^2 - 4x + 4$.

Problema Resuelto 2: Evaluación Numérica Directa

Enunciado: Si $f(x) = \frac{1}{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{x+4}$, evalúe $(g \circ f)(2)$.
Solución: Evaluamos primero de adentro hacia afuera. Hallamos $f(2)$:
$f(2) = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$.
Ahora evaluamos este resultado en g:
$g(1/4) = \sqrt{1/4 + 4} = \sqrt{1/4 + 16/4} = \sqrt{17/4}$.
Resultado: $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Problema Resuelto 3: Dominio Cauteloso (Racional)

Enunciado: Halle el dominio de $(f \circ g)(x)$ si $f(x) = \frac{5}{x-3}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.
Solución: Condición 1 (Interior g): $x \neq 0$.
Condición 2 (Exterior f): El denominador de f exige entrada $\neq 3$. Así que $g(x) \neq 3$.
Planteamos: $\frac{1}{x} \neq 3 \implies 1 \neq 3x \implies x \neq \frac{1}{3}$.
Dominio final: $\mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$.

Problema Resuelto 4: Composición con Radicales

Enunciado: Encuentre $(f \circ g)(x)$ y su dominio para $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 9$.
Solución: Fórmula: $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 9}$.
Dominio interior g: $\mathbb{R}$ (polinomio).
Dominio exterior f: Entrada $\geq 0 \implies g(x) \geq 0 \implies x^2 - 9 \geq 0$.
Resolviendo la inecuación cuadrática: $x \in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.
Resultado: $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, con Dom $\in (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$.

PROFE TEO

En el Problema 3, si hubiésemos hallado primero la fórmula final $f(g(x)) = \frac{5x}{1-3x}$, ¡el $x \neq 0$ habría desaparecido por arte de magia! Cuidado.

Problema Resuelto 5: Descomposición de Funciones

Enunciado: Si $H(x) = (3x - 5)^4$, encuentre dos funciones f y g (no triviales) tales que $H(x) = f(g(x))$.
Solución: Buscamos el "bloque internoz la .ºperación externa".
La operación interna más obvia es $3x - 5$. Sea $g(x) = 3x - 5$.
La operación externa es elevar algo a la cuarta potencia. Sea $f(x) = x^4$.
Comprobación: $f(g(x)) = f(3x - 5) = (3x - 5)^4$. (Correcto).

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Costos de Fabricación

Contexto: Un taller fabrica sillas. El costo de producir q sillas es $C(q) = 20q + 500$. La cantidad de sillas fabricadas en t horas es $q(t) = 5t$. Encuentre $C(q(t))$.
Solución: Sustituimos $q(t)$ dentro de $C(q)$.
$C(q(t)) = 20(5t) + 500 = 100t + 500$.
Respuesta: El costo total tras t horas de producción continua se modela directamente como $100t + 500$.

Aplicación 2: Crecimiento Bacteriológico

Contexto: El número de bacterias depende de la temperatura $N(T) = 20T^2 - 80T$. La temperatura según las horas transcurridas es $T(h) = 2h + 1$. Formule $N(T(h))$.
Solución: $N(T(h)) = 20(2h + 1)^2 - 80(2h + 1)$.
$= 20(4h^2 + 4h + 1) - 160h - 80$.
$= 80h^2 + 80h + 20 - 160h - 80$.
Respuesta: La población bacteriana respecto al tiempo es $80h^2 - 80h - 60$.

PROFE TEO
Las aplicaciones de composición nos ahorran el cálculo intermedio. Pasas del "Dato A.ªl "Dato C"saltándote el "Dato B"gracias a la fórmula compuesta.

Aplicación 3: Descuentos Sucesivos

Contexto: Una tienda rebaja el 20 % de un producto: $f(x) = 0{,}8x$. Al pagar con tarjeta, se descuentan \$15 extra: $g(x) = x - 15$. Halle $(g \circ f)(x)$.
Solución: La compra primero recibe el 20 % off (f), luego el cupón de tarjeta (g).
$g(f(x)) = g(0{,}8x) = 0{,}8x - 15$.
Respuesta: El precio final es $0{,}8x - 15$. Ojo, $(f \circ g)(x)$ daría un precio distinto.

Aplicación 4: Geometría Expansiva

Contexto: Una piedra cae al agua creando una onda circular de área $A(r) = \pi r^2$. El radio aumenta según el tiempo $r(t) = 4t$. Defina $A(r(t))$.
Solución: Componemos el área con el radio temporal.
$A(r(t)) = A(4t) = \pi(4t)^2 = \pi(16t^2)$.
Respuesta: El área de la onda en función del tiempo es $16\pi t^2$.

Aplicación 5: Física de Partículas

Contexto: La energía cinética es $E(v) = \frac{1}{2}mv^2$, asumiendo $m = 2$ kg constante. La velocidad frena según $v(t) = 10 - 2t$. Halle $E(v(t))$.
Solución: La función energía se simplifica a $E(v) = \frac{1}{2}(2)v^2 = v^2$.
$E(v(t)) = (10 - 2t)^2 = 100 - 40t + 4t^2$.
Respuesta: La energía disipada respecto al tiempo es $4t^2 - 40t + 100$ julios.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su lógica.

1. Si $f(x)$ y $g(x)$ son líneas rectas (funciones afines), ¿la composición $(f \circ g)(x)$ será siempre otra línea recta? Demuéstrelo algebraicamente.

2. ¿Qué sucede con la fórmula final si componemos una función con su función inversa, es decir, $(f \circ f^{-1})(x)$?

3. Un estudiante dice que $(f \cdot g)(x)$ y $(f \circ g)(x)$ son lo mismo si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$. Corrija este grave error de notación.

4. Si el rango de la función g (interior) son números estrictamente negativos, y el dominio de f (exterior) requiere números positivos, ¿cuál será el dominio de $f \circ g$?

5. ¿Por qué evaluar $(f \circ g)(3)$ numéricamente paso a paso suele ser más seguro que hallar la fórmula algebraica $(f \circ g)(x)$ y luego sustituir el 3?

6. Analice si la composición de funciones es asociativa. Es decir, ¿es cierto que $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$?

7. Si desglosamos $H(x) = \sqrt{x+5}$, podríamos decir $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x + 5$. ¿Existe otra pareja válida de funciones que logre lo mismo?

8. Dé un ejemplo de dos funciones f y g distintas donde por pura casualidad se cumpla que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

9. Al tener $f(x) = 1/x$, calcule $(f \circ f)(x)$. ¿Qué nombre recibe una función que al componerse consigo misma devuelve la variable original?

10. Explique con sus propias palabras el significado de la restricción .el rango de g debe intersectar el dominio de f"para que la composición exista.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Si $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = x - 4$, halle $(f \circ g)(x)$.

Guía de Solución Interactiva

1. La función exterior es f. Su estructura es $3(\_\_\_\_\_\_) + 2$.
2. Introducimos $g(x)$ dentro del paréntesis: $3(\_\_\_\_\_\_) + 2$.
3. Distribuimos y simplificamos: $3x - \_\_\_\_ + 2 = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

Problema 2. Halle $g(f(x))$ si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

Guía de Solución Interactiva

1. La función exterior es g. Su estructura es $\sqrt{(\_\_\_\_\_\_) - 1}$.
2. Insertamos $f(x)$ en el espacio vacío: $\sqrt{\_\_\_\_\_\_ - 1}$.
3. La fórmula final queda: $g(f(x)) = \_\_\_\_\_\_\_\_$.

Problema 3. Halle el dominio de $(f \circ g)(x)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x - 5$.

Guía de Solución Interactiva

1. Dominio interior $g(x)$: No hay restricciones, $x \in \_\_\_\_\_\_$.
2. El exterior f no acepta ceros, así que $g(x) \neq \_\_\_\_ \implies x - 5 \neq \_\_\_\_$.
3. Despejando: $x \neq \_\_\_\_$. El dominio final es $\mathbb{R} \setminus \{\_\_\_\_\}$.

PROFE TEO
Al hallar dominios compuestos, anota en una esquina: "La entrada de f (lo que esté en el paréntesis de f) NO puede ser cero / negativo, etc". Eso te dará la inecuación a resolver.

Problemas Generales

Problema 4. Dadas $f(x) = -2x + 1$ y $g(x) = 5x$, calcule $(f \circ g)(-3)$.

Problema 5. Dadas $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = \sqrt{x}$, calcule $(g \circ f)(4)$.

Problema 6. Halle $(f \circ g)(x)$ para $f(x) = x^2 - x$ y $g(x) = x + 1$.

Problema 7. Halle $(g \circ f)(x)$ usando las mismas funciones del Problema 6.

Problema 8. Determine el dominio de $(f \circ g)(x)$ si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x - 8$.

Problema 9. Evalúe $(f \circ f)(2)$ si $f(x) = 3x - 5$.

Problema 10. Descomponga $H(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en dos funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Problema 11. Halle el dominio de $(f \circ g)(x)$ si $f(x) = \frac{2}{x-1}$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.

Problema 12. Simplifique $(f \circ g)(x)$ si $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y $g(x) = x^2 - 1$.

Problema 13. Si $f(x) = |x - 3|$ y $g(x) = -x$, evalúe $f(g(-5))$.

Problema 14. Halle $(g \circ g)(x)$ para $g(x) = \frac{x+1}{x}$.

Problema 15. Determine el dominio de $f(g(x))$ si $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = 9 - x^2$.

Problema 16. Si $h(x) = \sqrt{x^2 + 10}$, verifique que $h(x) = f(g(x))$ proponiendo f y g.

Problema 17. Halle $(f \circ g)(x)$ para $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2(x)$.

Problema 18. Encuentre el dominio de $(g \circ f)(x)$ si $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x - 2}$.

Problema 19. Si $(f \circ g)(x) = 4x^2 - 12x + 9$ y $f(x) = x^2$, determine la expresión de $g(x)$.

Problema 20. Halle el dominio de la composición triple $(f \circ g \circ h)(x)$ donde $f = 1/x$, $g = \sqrt{x}$, $h = x - 3$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La producción diaria rige por $P(h) = 50h$. Los ingresos rigen por ventas $I(p) = 2p$. Modele los ingresos según las horas trabajadas.

Guía de Solución Interactiva

1. Debemos evaluar la función de ingresos I con la entrada __________. 2. Estructura: $I(P(h)) = 2(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$. 3. Función compuesta resultante: __________.

Problema 2. Un software filtra ruido $R(v) = v/10$. La antena capta la señal pura $S(t) = 100t^2$. Formule el ruido residual detectado en el tiempo.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos filtro sobre señal: $R(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$. 2. Planteamos fórmula: $\frac{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}{10}$. 3. Modelo temporal: $R_t(t) =$ __________.

Problema 3. Un subsidio estatal es $S(p) = 0{,}5p$. La tarifa poblacional es $P(f) = 10f - 2$. Estructure el apoyo monetario respecto a la población base.

Guía de Solución Interactiva

1. Insertamos tarifa en el subsidio: $S(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$. 2. Reemplazamos: $0{,}5(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$. 3. Modelo consolidado final: __________.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una constructora vierte concreto ocupando $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. El grosor fluye bajo temporalidad $r(t) = 2t$. Especifique el vaciado volumétrico final.

Problema 5. Un panel capta radiación ultravioleta $U(c) = c^2 + 10$. La capa de ozono permite un paso fotónico $c(h) = 5h$. Evalúe la carga recibida horaria.

Problema 6. La bolsa agrícola transa maíz a precio $P(k) = 4k - 1$. Los kilogramos embalados fluctúan diariamente $K(d) = 100d$. Determine el valor accionario por jornada.

Problema 7. Una turbina gira a revoluciones $R(e) = 50e$. La energía hidroeléctrica inyectada proviene de caudales $e(v) = v^3$. Modele la rotación dependiente del flujo hídrico.

Problema 8. El radio de deforestación es $R(t) = \sqrt{t+2}$. La afectación ecológica silvestre es $A(r) = \pi r^2$. Plantee el impacto arbóreo temporal.

Problema 9. Las ventas minoristas aplican rebaja base $f(x) = x - 50$. Un código promocional reduce a la mitad $g(x) = x/2$. Calcule el pago si primero descuentan fijo.

Problema 10. Usando el contexto anterior (Problema 9), calcule la tarifa si primero aplican el cupón a la mitad y luego descuentan el monto fijo estipulado.

Problema 11. Un satélite gasta propelente $G(o) = \frac{10}{o}$. Las órbitas corregidas se calculan $O(d) = d^2 + 1$. Detalle el consumo según la distancia maniobrada.

Problema 12. La propagación vírica responde a células $V(c) = \sqrt{c}$. El conteo celular inmunológico decae $C(t) = 100 - 2t$. Escriba el modelo y defina su dominio temporal válido.

Problema 13. Un engranaje desgasta su eje $E(f) = f^2 + f$. La fricción metálica escala $F(h) = 3h$. Derive la deformación mecánica en base a las horas de servicio continuo.

Problema 14. Las acciones de una app escalan $V(u) = \log(u)$. Los usuarios conectados saturan la red $U(m) = 10^m$. Redacte el incremento financiero por minuto exacto.

Problema 15. Un químico purifica toxinas restando acidez $P(a) = a - 4$. El solvente previo filtró la mezcla $A(q) = \frac{q}{2}$. Precise el balance alcalino final.

Problema 16. Una aerolínea gasta combustible $C(v) = v^2 + 100$. La velocidad crucero responde a ráfagas de viento $V(r) = 800 - r$. Programe el tablero de vuelo operativo.

Problema 17. Un buzo soporta atmósferas $P(p) = \frac{p}{10} + 1$. La profundidad descendida obedece $P_r(t) = 2t^2$. Determine la barometría torácica padecida por segundo.

Problema 18. El área de sombra lunar proyectada es $A(s) = \pi s^2$. La silueta crece orbitalmente $S(k) = k - 3$. Valide el oscurecimiento territorial geográfico dependiente de k.

Problema 19. La criptografía revuelve matrices $C(n) = |n - 10|$. El código generador emite bytes $N(b) = -b^2$. Exponga la matriz de cifrado negativa interceptada por el firewall.

Problema 20. La fatiga visual prolongada se registra $F(b) = b^3$. El brillo de la pantalla irradia fotones $B(h) = \sqrt[3]{h-5}$. Formule la ceguera proyectada horaria del monitor.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $3x - 10$
2. $\sqrt{x^2 - 1}$
3. $\mathbb{R} \setminus \{5\}$
4. 31
5. $\sqrt{19}$
6. $x^2 + x$
7. $x^2 - x + 1$
8. $[4, \infty)$
9. -2
10. $f(x) = 1/x$, $g(x) = x^2 + 1$ (ejemplo válido).
11. $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$
12. $\frac{x^2-1}{x^2}$ $(x \neq \pm 1)$
13. 2
14. $\frac{2x+1}{x+1}$
15. $(-3, 3)$
16. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 + 10$ (u otros).
17. x $(x > 0)$
18. $(0, 1/2]$
19. $g(x) = 2x - 3$ o $3 - 2x$.
20. $(3, \infty)$

Propuestos de Aplicación

1. $I(h) = 100h$
2. $R_t(t) = 10t^2$
3. $S(f) = 5f - 1$
4. $V(t) = \frac{32}{3}\pi t^3$
5. $U(h) = 25h^2 + 10$
6. $P(d) = 400d - 1$
7. $R(v) = 50v^3$
8. $A(t) = \pi(t + 2)$
9. $g(f(x)) = \frac{x-50}{2}$
10. $f(g(x)) = \frac{x}{2} - 50$
11. $G(d) = \frac{10}{d^2+1}$
12. $V(t) = \sqrt{100 - 2t}$; Dom $t \leq 50$.
13. $E(h) = 9h^2 + 3h$
14. $V(m) = m$
15. $P(q) = \frac{q}{2} - 4$ o $\frac{q-8}{2}$
16. $C(r) = (800 - r)^2 + 100$
17. $P(t) = \frac{1}{5}t^2 + 1$
18. $A(k) = \pi(k - 3)^2$
19. $C(b) = |-b^2 - 10| = b^2 + 10$
20. $F(h) = h - 5$

{Adentro}

¡Llegaste al Final!

’La composición de funciones nos enseña una gran lección: a veces para entender el panorama exterior, primero debes dominar y transformar tu interior.’

- La profundidad del álgebra

¡Felicidades! Has dominado la técnica de "funciones anidadas". Con este poder, ninguna cadena de ecuaciones en física, química o ingeniería te tomará por sorpresa.

$\subset$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com