$L_1 \neq L_2$

∞

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

CLASIFICACIÓN DE DISCONTINUIDADES

CUADERNO DE TRABAJO

Evitables, de Salto y Esenciales

$\frac{0}{0}$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Diagnosticando las Fracturas

Cuando una función falla en ser continua en $x = a$, nuestro trabajo analítico apenas comienza. Las matemáticas exigen que clasifiquemos la gravedad de esa "fractura"gráfica. Existen tres tipos fundamentales de discontinuidades, y todo depende del comportamiento de los límites laterales.

PROFE TEO

¡Ojo con esto! La clave absoluta para clasificar es responder a una sola pregunta: ¿Existe el límite general $\lim_{x\to a} f(x)$? Si la respuesta es sí, ¡bingo!, es evitable.

1. Discontinuidad Evitable (o Removible)

Ocurre cuando el límite **existe** (es un número real L), pero la función no está definida en a, o bien $f(a) \neq L$. Se llama .evitable"porque bastaría con redefinir $f(a) = L$ para "tapar el huecoz hacerla continua. Suele aparecer tras una indeterminación $0/0$.

2. Discontinuidad de Salto

Ocurre cuando los límites laterales existen (son finitos) pero son **diferentes**:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L_2 \quad (L_1 \neq L_2)$$

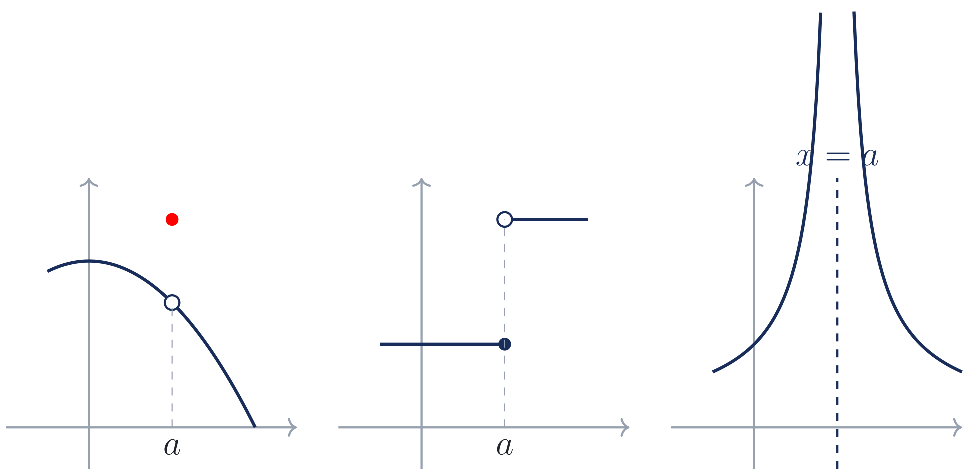
Es típica en funciones definidas a trozos, en funciones parte entera y en fracciones con valor absoluto.

3. Discontinuidad Esencial (o Infinita)

Ocurre cuando al menos uno de los límites laterales **no existe** o es **infinito** ($\pm\infty$). Incluye las asíntotas verticales (forma $K/0$) y los casos de oscilación infinita como $\sin(1/x)$ cerca de cero.

PROFE TEO

El valor absoluto $|x - a|$ es una fábrica de saltos. Si lo ves dividiendo a un polinomio, prepárate para un límite por la izquierda negativo y uno por la derecha positivo.



1. Evitable **2. De Salto** **3. Esencial / Infinita**

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Hueco Algebraico (Evitable)

Enunciado: Clasifique la discontinuidad de $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x-1}$ en $x = 1$.
Solución: Evaluamos: $f(1) = 0/0$. Calculamos el límite factorizando:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-3) = -2$$

Como el límite existe (es -2) pero la función no está definida, es una **discontinuidad evitable**.

PROFE TEO
Las asíntotas verticales siempre originan discontinuidades esenciales. Si evalúas el límite y obtienes K/0, detén todo, acabas de hallar un infinito.

Problema Resuelto 2: El Salto del Valor Absoluto

Enunciado: Determine el tipo de discontinuidad de $g(x) = \frac{|x-5|}{x-5}$ en $x = 5$.
Solución: Límites laterales: $x \to 5^+ \implies |x-5| = x-5 \implies \lim \frac{x-5}{x-5} = 1$. $x \to 5^- \implies |x-5| = -(x-5) \implies \lim \frac{-(x-5)}{x-5} = -1$. Como $1 \neq -1$, el límite no existe y los laterales son finitos. Es una **discontinuidad de salto**.

Problema Resuelto 3: Asíntota Vertical (Esencial)

Enunciado: Clasifique la discontinuidad en $x = -2$ para $h(x) = \frac{x}{x+2}$.
Solución: Al evaluar directamente obtenemos $-2/0$. Esto indica un límite infinito. Por la derecha ($x \to -2^+$): $\frac{-}{(+)} = -\infty$. Por la izquierda ($x \to -2^-$): $\frac{-}{(-)} = +\infty$. Al menos un límite lateral es infinito, por lo que es una **discontinuidad esencial (infinita)**.

Problema Resuelto 4: Oscilación Extrema (Esencial)

Enunciado: Estudie $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ en $x = 0$.
Solución: A medida que $x \to 0$, el argumento $1/x \to \pm\infty$. La función coseno oscila incesantemente entre -1 y 1 y jamás se establece en un valor fijo. El $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$ simplemente **no existe**, y como no son límites laterales finitos estables, es una **discontinuidad esencial**.

PROFE TEO
Cuidado con las funciones a trozos trigonométricas. A veces los límites de tramos completamente distintos coinciden milagrosamente.

Problema Resuelto 5: Salto en Función a Trozos

Enunciado: Clasifique la discontinuidad en $x = 0$ de $f(x) = \{e^x \text{ si } x < 0\,; \sin(x) \text{ si } x \geq 0\}$.
Solución: Límite izquierdo: $\lim_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$. Límite derecho: $\lim_{x\to 0^+} \sin(x) = \sin(0) = 0$. Como los laterales son finitos pero distintos ($1 \neq 0$), la función experimenta una **discontinuidad de salto** en $x = 0$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Relé Electrónico

Contexto: Un circuito integrado regula voltaje $V(t) = \frac{t^2-9}{t-3}$. Un cortocircuito apaga el relé en $t = 3$. Clasifique la pérdida de tensión si el sistema puede parchear el vacío algorítmicamente.
Solución: $\lim_{t\to 3} \frac{(t-3)(t+3)}{t-3} = \lim_{t\to 3}(t+3) = 6$. Al existir un límite válido (6), la interrupción eléctrica es una **discontinuidad evitable**.

Aplicación 2: Falla Estructural

Contexto: La tracción de un cable grúa colapsa según $T(f) = \frac{100}{f-5}$. Clasifique el comportamiento físico si la tensión diverge destrozando las poleas al acercarse a 5 toneladas.
Solución: Al evaluar $f \to 5$, tenemos $100/0$, lo que genera un polo asintótico infinito ($+\infty$ por la derecha). Es una **discontinuidad esencial (infinita)**.

· · · · ▷
PROFE TEO
En economía, las "discontinuidades de salto"modelan impuestos, cambio de tarifas o bonos que se activan al cruzar ciertos montos exactos.

Aplicación 3: Tramos Impositivos

Contexto: El arancel corporativo carga $I(x) = \{5x \text{ si } x < 10\,;\, 12x \text{ si } x \geq 10\}$. Indique la naturaleza del gravamen al declarar exactamente diez millones.
Solución: Límite izquierdo: $5(10) = 50$. Límite derecho: $12(10) = 120$. Los montos divergen finitamente. Es una **discontinuidad de salto** impositivo.

Aplicación 4: Dispersión Fotónica

Contexto: Un lente prisma refracta luz angularmente marcando $A(\theta) = \frac{\tan(\theta)}{\theta}$. Diagnostique la aberración central sabiendo que el rayo falla imperceptiblemente al centrarse el eje $\theta = 0$.
Solución: Recordemos el límite notable $\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$. El límite óptico existe y converge a 1. Constituye una **discontinuidad evitable**.

Aplicación 5: Fricción Biológica

Contexto: Una articulación ósea roza secando su fluido sinovial modelado por $F(c) = \frac{|c-2|}{c-2}$. Identifique la falla patológica instantánea al transitar del reposo hacia carga motriz en índice dos.
Solución: Lateral derecho arroja 1, lateral izquierdo arroja -1. La fricción invierte su vector bruscamente evidenciando una **discontinuidad de salto**.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Si una discontinuidad es evitable, ¿por qué redefinir exclusivamente la imagen de la función $f(a)$ soluciona el problema de manera matemática?

2. Argumente lógicamente por qué una función no puede poseer simultáneamente una discontinuidad de salto y una discontinuidad esencial infinita en un mismo punto $x = a$.

3. Analice la función $\sec(x)$. Geométricamente, clasifique qué tipo de discontinuidad experimenta periódicamente.

4. Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, ¿la fracción $f(x)/g(x)$ siempre presentará una discontinuidad evitable en $x = a$? Sustente su respuesta.

5. En un contexto termodinámico, si la temperatura experimenta una "discontinuidad de salto", ¿qué violaría esto respecto a las leyes físicas reales de la transferencia de calor?

6. ¿Por qué la función signo de x, definida como $\mathrm{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$ (con $\mathrm{sgn}(0) = 0$), se considera el ejemplo maestro de una discontinuidad de salto?

7. Demuestre verbalmente cómo identificar visualmente una discontinuidad esencial de oscilación sin necesidad de calcular límites algebraicos explícitos.

8. Si en $x = c$, una función definida a trozos arroja laterales de 5 y $+\infty$, clasifique formalmente la discontinuidad de acuerdo a los teoremas del cálculo.

9. ¿Es posible que una función polinómica presente alguna discontinuidad removible o esencial? Justifique su respuesta analizando el dominio.

10. Al evaluar la función de Heaviside o escalón unitario, explique por qué su uso está restringido en modelos físicos de aceleración instantánea.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Clasifique la discontinuidad de $f(x) = \frac{x^2-16}{x+4}$ en $x = -4$.

Guía de Solución Interactiva

1. La evaluación directa produce la forma indeterminada $\frac{\_\_\_\_}{\_\_\_\_}$.
2. Factorizamos el numerador: $\frac{(x-4)(x+\_\_\_\_\_\_)}{x+4}$.
3. Simplificamos y evaluamos el límite, obteniendo _____. Al existir el límite, la discontinuidad es __________.

Problema 2. Clasifique la ruptura de $g(x) = \frac{x}{|x|}$ en $x = 0$.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos el límite por la derecha $(x > 0)$: $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \_\_\_\_\_$.
2. Evaluamos el límite por la izquierda $(x < 0)$: $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = \_\_\_\_\_$.
3. Como los límites laterales son finitos pero __________, es una discontinuidad __________.

Problema 3. Determine el tipo de discontinuidad de $h(x) = \frac{1}{x-2}$ en $x = 2$.

Guía de Solución Interactiva

1. Al evaluar en $x = 2$, obtenemos el patrón $\frac{\_\_\_\_}{0}$.
2. Un lateral será $+\infty$ y el otro $\_\_\_\_\_\infty$.
3. Dado que involucra divergencia infinita, catalogamos la discontinuidad como _______________.

PROFE TEO
Las tangentes se rompen cada 90° (o $\pi/2$). Estos cortes son asíntotas clásicas, por tanto, siempre esenciales.

Problemas Generales Analíticos

Problema 4. Clasifique la discontinuidad en $x = 3$ de $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-3x}$.

Problema 5. Determine el tipo de discontinuidad de $y = \tan(x)$ en $x = \pi/2$.

Problema 6. Analice $f(x) = \{2x \text{ si } x < 1\,;\, 5 \text{ si } x \geq 1\}$ en $x = 1$.

Problema 7. Clasifique la discontinuidad de $g(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+2}$ en $x = -2$.

Problema 8. Estudie la función $y = \frac{|x+1|}{x+1}$ en su punto de ruptura.

Problema 9. Determine qué tipo de falla presenta $f(x) = \frac{3}{x^2}$ en $x = 0$.

Problema 10. Analice $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ en el origen.

Problema 11. Clasifique la discontinuidad de $f(x) = e^{1/x}$ en $x = 0$.

Problema 12. Estudie la ruptura de $y = \ln|x|$ en el origen.

Problema 13. Analice $f(x) = \{x^2 \text{ si } x < 0\,;\, 1 \text{ si } x = 0\,;\, -x^2 \text{ si } x > 0\}$.

Problema 14. Determine la discontinuidad de $y = \frac{x^3-8}{x-2}$ en $x = 2$.

Problema 15. Clasifique el punto de falla de $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ en $x = \pi/2$.

Problema 16. Analice la función escalón $\lfloor x \rfloor$ en $x = 4$.

Problema 17. Clasifique la ruptura de $y = x \sin(1/x)$ (asumiendo no definida en 0).

Problema 18. Determine el tipo de discontinuidad de $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en $x = 1$.

Problema 19. Estudie $f(x) = \{\frac{1}{x} \text{ si } x < 0\,;\, x \text{ si } x \geq 0\}$ en el origen.

Problema 20. Clasifique la discontinuidad de $y = \frac{x^2-x-2}{x^2-4x+4}$ en $x = 2$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un servidor de red acusa latencia de datos modelada por $L(s) = \frac{s^2-16}{s-4}$. Categorice la interrupción algorítmica experimentada exactamente a los cuatro segundos de sobrecarga sostenida.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos la caída de sistema: 0/0, indicando un posible límite _____. 2. Factorizamos buscando recuperar flujo: $\lim_{s\to 4}(s + \_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$. 3. La conectividad puede restaurarse; representa una discontinuidad __________.

Problema 2. La dilatación de rieles ferroviarios bajo sol extremo registra fractura $E(t) = \frac{|t-40|}{t-40}$. Dictamine el estado del acero al cruzar instantáneamente los cuarenta grados térmicos ambientales.

Guía de Solución Interactiva

1. El lado frío ($t < 40$) contrae el metal a un índice _____. 2. El lado cálido expande agresivamente marcando _____. 3. La inversión repentina fractura la viga originando una discontinuidad __________.

Problema 3. Una válvula de contención hidráulica soporta presiones colosales $P(v) = \frac{500}{v-10}$. Analice el comportamiento destructivo asintótico cuando el volumen interno roza los diez litros cúbicos exactos.

Guía de Solución Interactiva

1. Evaluamos el tope volumétrico encontrando una constante dividida por _____. 2. La presión estalla tendiendo asintóticamente al _____. 3. El estallido mecánico clasifica indudablemente como discontinuidad __________.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Los imanes de un tren de levitación repelen vagones variando fuerza $F(d) = \{15d \text{ si } d < 2\,; 50 \text{ si } d \geq 2\}$. Compruebe el tirón magnético brusco cruzando dos metros.

Problema 5. El plomo radiactivo aísla reactores escudando radiación letal $R(g) = \frac{g^2-25}{g-5}$. Diagnostique la fuga virtual calculable al perforar cinco milímetros exactos de revestimiento primario protector.

Problema 6. La batería de un dron comercial agota litio marcando $B(t) = \frac{1}{(t-30)^2}$. Califique la caída total de rotores que precipita el cuadricóptero al minuto treinta operativo.

Problema 7. El índice Nasdaq detiene cotizaciones usando la función $V(x) = \lfloor x \rfloor$. Clasifique matemáticamente la parálisis impuesta en los monitores bursátiles cada hora de mercado activa.

Problema 8. La asimilación enzimática intracelular satura substratos evaluando asintóticamente $E(c) = \frac{\sin(c)}{c}$. Detalle la pausa metabólica inocua cuando la concentración química baja al nivel basal neutro cero.

Problema 9. El sónar antisubmarino rebota frecuencias de eco $S(f) = \frac{f^3-27}{f-3}$. Identifique la falla acústica ciega subsanable rastreando señales colindantes a los tres megahercios marinos.

Problema 10. La órbita de atraque satelital corrige trayectorias calculando $T(m) = \{m^2 \text{ si } m < 4\,; 12 \text{ si } m \geq 4\}$. Categorice el golpe propulsor inestable al rebasar el cuarto meridiano.

Problema 11. Un láser calibrador óptico pierde foco refractando $L(a) = \frac{\tan(a)}{a}$. Restituya la calibración luminosa diagnosticando la dispersión focal experimentada en el ángulo de incidencia microscópico central.

Problema 12. La tracción de placas tectónicas de subducción acumula megatones $M(e) = \frac{100}{|e-8|}$. Determine el colapso catastrófico geológico liberado acercándose al umbral vibratorio Richter número ocho.

Problema 13. La degradación de polímeros asfálticos bajo radiación solar arroja $D(u) = \frac{u^2-1}{u-1}$. Especifique el parche químico necesario solventando la anomalía de consistencia en el ultravioleta crítico.

Problema 14. Un emisor de rayos X oncológico dispara ráfagas $X(i) = \{i + 5 \text{ si } i < 1\,;\, 4i \text{ si } i \geq 1\}$. Califique la caída terapéutica dosificando intensidades sobre el tejido dañado.

Problema 15. Las ondas sísmicas secundarias fragmentan rocas obedeciendo $W(v) = v\sin(1/v)$. Testifique analíticamente la absorción ininterrumpida de vibración terrestre justo sobre el epicentro telúrico inestable puro.

Problema 16. Una encriptación criptográfica de blockchain resetea tokens $C(k) = \frac{|k-50|}{k-50}$. Defina el corte de verificación transaccional al validar el bloque algorítmico clave cincuenta exacto del código.

Problema 17. El muro rompeolas marítimo resiste marejadas absorbiendo julios $R(o) = \frac{1}{o^3}$. Verifique el hundimiento infraestructural masivo soportando resacas retirándose vertiginosamente al nivel cero absoluto oceánico.

Problema 18. Un criogenizador cuántico estabiliza núcleos atómicos enfriando $C(k) = \frac{k^2-16}{k^2-4k}$. Identifique la falla térmica programable a cuatro kelvin para aislar el contenedor isotópico eficientemente intacto.

Problema 19. La desintegración radiactiva de uranio purgado esparce energía $U(t) = \{20e^{-t} \text{ si } t < 0\,;\, 15 \text{ si } t \geq 0\}$. Clasifique el decaimiento anómalo cronometrando la fisión inicial disparada.

Problema 20. El túnel cuántico interrumpe conductancia de electrones $I(v) = \frac{v^4-1}{v^2-1}$. Concrete el puente eléctrico semiconductor reparando el desvío micro-amperímetro detectado aislando el voltio basal único.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. Evitable (límite -8).
2. De Salto (-1 y 1).
3. Esencial / Infinita ($K/0$).
4. Evitable (límite 2).
5. Esencial / Infinita (asíntota).
6. De Salto (2 y 5).
7. Evitable (límite 1).
8. De Salto (-1 y 1).
9. Esencial / Infinita ($+\infty$).
10. Evitable (límite 1).
11. Esencial (lateral a $+\infty$).
12. Esencial / Infinita.
13. Evitable (límite 0).
14. Evitable (límite 12).
15. Esencial / Infinita.
16. De Salto en enteros.
17. Evitable (límite 0).
18. Evitable (límite 1/2).
19. Esencial (lateral a $-\infty$).
20. Esencial / Infinita.

Propuestos de Aplicación

1. Evitable (restaurable a 8).
2. De Salto (-1 a 1).
3. Esencial / Infinita.
4. De Salto (30 y 50).
5. Evitable (10 fuga).
6. Esencial / Infinita (caída total).
7. De Salto (escalones horarios).
8. Evitable (límite 1).
9. Evitable (falla 27).
10. De Salto (16 a 12).
11. Evitable (calibra a 1).
12. Esencial / Infinita (colapso).
13. Evitable (parche 2).
14. De Salto (6 y 4).
15. Evitable (límite 0).
16. De Salto (-1 a 1).
17. Esencial / Infinita.
18. Evitable (falla 2).
19. De Salto (20 a 15).
20. Evitable (puente 2).

¡Diagnóstico Completo!

’No todas las interrupciones en tu camino son catastróficas. Algunas son simples saltos para subir de nivel, otras son huecos que puedes reparar fácilmente, y unas pocas, infinitas oportunidades de replantear tu trayectoria.’

- La analítica del fracaso y el éxito

¡Felicidades! Has aprendido a clasificar cualquier obstáculo. Estás oficialmente listo para continuar avanzando sin miedo a los quiebres.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com