PRECÁLCULO

CEROS RACIONALES

CUADERNO DE TRABAJO

Teorema p/q y Regla de Descartes

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Cazando Raíces Ocultas

Cuando nos enfrentamos a polinomios de grado 3 o superior, no siempre podemos factorizar directamente. Necesitamos radares"matemáticos que nos indiquen dónde buscar. Para ello, combinamos dos poderosas herramientas.

1. El Teorema de los Ceros Racionales

Si un polinomio $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces cualquier cero racional de la forma $\frac{p}{q}$ (simplificada) debe cumplir:

- $\boldsymbol{p}$ es un factor entero del término constante a_0.
- $\boldsymbol{q}$ es un factor entero del coeficiente principal a_n.

La lista de posibles ceros se obtiene combinando todas las fracciones $\pm\frac{p}{q}$.

PROFE TEO

¡Cuidado! El teorema no te da todas las raíces del mundo, solo las racionales (fracciones y enteros). Las raíces irracionales o imaginarias se esconden de este radar.

2. La Regla de los Signos de Descartes

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

1. **Ceros Reales Positivos:** El número de ceros positivos es igual al número de cambios de signo en $P(x)$, o es menor que ese número por un entero par.
2. **Ceros Reales Negativos:** El número de ceros negativos es igual al número de cambios de signo en $P(-x)$, o es menor por un entero par.

PROFE TEO

Descartes no te dice CUÁLES son las raíces, solo te dice CUÁNTAS podrías tener. Es una herramienta de conteo, no de búsqueda exacta. ¡Resta siempre de 2 en 2!

Análisis de Cambios de Signo: $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 7x + 2$

$$+3x^4 \xrightarrow{1} -5x^3 \xrightarrow{2} +x^2 \xrightarrow{3} -7x \xrightarrow{4} +2$$

4 cambios de signo $\implies$ 4, 2, o 0 raíces positivas.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Lista de Posibles Ceros

Enunciado: Liste todos los posibles ceros racionales de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x - 3$.
Solución: El término constante es $a_0 = -3$. Sus factores (p) son: $\pm1, \pm3$.
El coeficiente principal es $a_n = 2$. Sus factores (q) son: $\pm1, \pm2$.
Posibles ceros $\frac{p}{q}$: $\frac{\pm1}{1}, \frac{\pm3}{1}, \frac{\pm1}{2}, \frac{\pm3}{2}$.
Respuesta: $\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$.

Problema Resuelto 2: Regla de Descartes (Positivos)

Enunciado: Determine el número de posibles ceros reales positivos para $P(x) = 4x^5 + 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 6$.
Esquema de Solución:

$$+ \quad + \quad - \quad + \quad - \quad -$$

1 2 3

Hay 3 cambios de signo. Restamos enteros pares (3 - 2 = 1).
Respuesta: El polinomio tiene 3 o 1 ceros reales positivos.

Problema Resuelto 3: Regla de Descartes (Negativos)

Enunciado: Determine el número de posibles ceros reales negativos para $g(x) = x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x + 3$.
Solución: Evaluamos $g(-x)$ cambiando el signo a las potencias impares:
$g(-x) = x^4 - 5(-x)^3 - 2x^2 + 7(-x) + 3$
$g(-x) = +x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 7x + 3$.
Signos: $+ \quad + \quad - \quad - \quad +$.
Cambios de signo: de $+$ a $-$ (uno), de $-$ a $+$ (dos). Hay 2 cambios.
Respuesta: El polinomio tiene 2 o 0 ceros reales negativos.

PROFE TEO
Para hallar $P(-x)$, solo cambia el signo a los términos con exponente IMPAR. Los términos con exponente par (y la constante) se quedan igualitos.

Problema Resuelto 4: Cacería de la Primera Raíz

Enunciado: Halle todos los ceros racionales de $h(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.
Solución: Posibles ceros (p/q, con $q = 1$): $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.
Probamos con división sintética para $x = -1$:

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline
 & & -1 & 5 & -6 \\
 & 1 & -5 & 6 & 0
\end{array}$$

Como el residuo es 0, $x = -1$ es raíz. El cociente degrada a $x^2 - 5x + 6$.
Factorizamos el trinomio: $(x-2)(x-3) = 0 \implies x = 2, x = 3$.
Respuesta: Las raíces son $-1, 2, 3$.

Problema Resuelto 5: Polinomios con Ceros Faltantes

Enunciado: Use Descartes para analizar los ceros de $f(x) = 2x^6 + 3x^2 + 5$.
Solución: Positivos: Signos $+ \quad + \quad +$. No hay cambios de signo $\implies$ 0 raíces positivas.
Negativos: $f(-x) = 2x^6 + 3x^2 + 5$. Signos $+ \quad + \quad +$. $\implies$ 0 raíces negativas.
El número cero no es raíz porque $f(0) = 5 \neq 0$.
Respuesta: Dado que el grado es 6 y no hay raíces reales positivas ni negativas, las 6 raíces deben ser estrictamente imaginarias (complejas conjugadas).

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Geometría de Cajas

Contexto: El volumen de un embalaje es $V(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$. Un diseño exige que el volumen sea cero para calibrar el troquelado de corte. Extraiga las cotas métricas racionales base.
Solución: Igualamos a cero. Posibles $p/q = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Probando $x = -1$ da residuo cero. El polinomio se reduce a $x^2 - 5x + 6$, cuyas raíces son 2 y 3.
Respuesta: Las cotas de corte son $x = -1, 2, 3$.

Aplicación 2: Finanzas Corporativas

Contexto: El déficit monetario de una empresa en quiebra modela $P(t) = 2t^3 - 9t^2 + 7t + 6$. Encuentre el tiempo exacto donde la deuda se anula cruzando el eje financiero de equilibrio.
Solución: Posibles ceros incluyen $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Al usar división sintética con $t = 2$, el residuo es 0. El polinomio deprime a $2t^2 - 5t - 3 = 0$, que arroja $t = -1/2$ y $t = 3$.
Respuesta: El equilibrio ocurre en $t = 2$ y $t = 3$.

Aplicación 3: Cinemática de Proyectiles

Contexto: La desviación de una ojiva balística traza la curva de vuelo $d(t) = 3t^3 - t^2 - 15t + 5$. Precise los segundos exactos de intersección con la barrera láser horizontal a nivel cero.
Solución: Aplicando el teorema, buscamos raíces. Agrupando directamente: $t^2(3t - 1) - 5(3t - 1) = 0 \implies (3t - 1)(t^2 - 5) = 0$. Obtenemos una raíz racional $1/3$ y dos irracionales $\pm\sqrt{5}$.
Respuesta: Intersecta en $t = 1/3$ y $t = \sqrt{5}$.

Aplicación 4: Concentración Sanguínea

Contexto: Un fármaco eleva pulsaciones bajo la fórmula metabólica $C(h) = h^4 - 4h^3 - h^2 + 16h - 12$. Calcule las horas precisas donde el efecto cardíaco desaparece del torrente celular.
Solución: Descartes indica probables raíces positivas. Probando $h = 1$ sintéticamente da cero, deprimiendo a $h^3 - 3h^2 - 4h + 12$. Probando $h = 2$ da cero. Factorizando el resto da $h = 3, h = -2$.
Respuesta: Desaparece a las $1, 2$ y 3 horas.

PROFE TEO
Las reglas de Descartes son geniales para ahorrar tiempo. Si la regla te dice Çero raíces negativas", ¡ni te molestes en probar las fracciones p/q que tengan signo menos!

Aplicación 5: Diseño de Antenas Paraboloides

Contexto: Un soporte de aluminio cruza la estructura bajo el polinomio de carga $f(x) = x^3 - 7x - 6$. Identifique los tres puntos de anclaje estructural sobre el suelo plano del hangar.
Solución: Ceros posibles $\pm 1, \pm 2, \ldots$ Con $x = -1$, el residuo es cero. Sintética arroja cociente $x^2 - x - 6$. Factorizando resulta $(x-3)(x+2) = 0$, obteniendo 3 y -2.
Respuesta: Los anclajes estructurales están en $x = -1, -2, 3$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Si el término constante a_0 de un polinomio es cero, ¿qué raíz obvia posee el polinomio sin importar los demás coeficientes?

2. El Teorema de los Ceros Racionales sugiere una lista de posibles raíces. Si el polinomio es $x^3 - 2$, la lista es $\pm 1, \pm 2$. Al evaluarlos ninguno funciona. ¿Qué concluye sobre las verdaderas raíces?

3. Un compañero nota que los coeficientes de $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 5x + 1$ son todos positivos. Usando a Descartes, ¿qué se puede afirmar instantáneamente sobre sus raíces reales positivas?

4. Si la Regla de Descartes nos indica "3 o 1 raíces positivas", ¿por qué no puede afirmar categóricamente que habrá exactamente 3? ¿Qué papel juegan las raíces complejas aquí?

5. Un polinomio tiene grado 5. Descartes revela 0 raíces positivas y 1 raíz negativa. Sabiendo que los coeficientes son reales, deduzca cuántas raíces imaginarias posee obligatoriamente.

6. Dado $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + p$. Si p es un número primo, ¿cuántos posibles ceros racionales deberíamos probar como máximo asumiendo $p > 0$?

7. Si $f(-x) = f(x)$, el polinomio es una función par. ¿Cómo afectará esto al análisis de raíces usando la Regla de los Signos de Descartes?

8. ¿Por qué la Regla de Descartes nos obliga a restar de 2 en 2 y no de 1 en 1 cuando analizamos la reducción de posibles ceros reales?

9. Explique detalladamente el proceso matemático por el cual, al encontrar una raíz con la división sintética, la búsqueda de las siguientes raíces se vuelve más sencilla ("depresión del polinomio").

10. Si el coeficiente principal de un polinomio no es 1 (no es mónico), el teorema p/q generará fracciones. Geométricamente, ¿qué nos indica un cero racional fraccionario sobre el cruce en el eje X?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Liste los posibles ceros racionales para $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 5x - 4$.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica el término constante: p debe ser factor de _____. Valores: ± 1, $\pm$_____, $\pm$_____.

2. Identifica el coeficiente principal: q factor de _____. Valores: ± 1, $\pm$_____.

3. Combina $\frac{p}{q}$: ± 1, ± 2, $\pm$_____, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm$_____, $\pm\frac{4}{3}$.

Problema 2. Aplique la Regla de Descartes a $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 1$.

Guía de Solución Interactiva

1. Evalúa $f(x)$: Signos $+, -, +, -, +$. Cambios de signo: _____. Ceros positivos: _____, _____, o _____.

2. Evalúa $f(-x)$: $2x^4 + 5x^3 + x^2 + x + 1$. Signos: todos $+$. Cambios: _____.

3. Conclusión: El polinomio tiene _____ ceros negativos, por lo que toda raíz real debe ser __________.

Problema 3. Halle una raíz racional de $x^3 - 7x + 6$ usando el teorema y sintética.

Guía de Solución Interactiva

1. Posibles ceros p/q: $\pm 1, \pm 2, \pm$_____, $\pm$_____.

2. Prueba con $x = 1$ en la sintética. Coeficientes: $1,$ _____, $-7, 6$.

3. Baja 1, suma... Residuo es _____. Por lo tanto, $x = 1$ (Es / No es) raíz. Cociente deprimido: $x^2 + x -$ _____.

PROFE TEO

Para evitar perder tiempo probando la enorme lista de p/q, aplica Descartes primero. Si descubres que no hay raíces negativas, ¡tacha todas las fracciones con signo menos de tu lista!

Problemas Generales

Problema 4. Liste todos los posibles ceros racionales de $2x^3 - 5x - 6$.

Problema 5. Use Descartes para predecir raíces positivas de $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Problema 6. Use Descartes para predecir raíces negativas de $x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Problema 7. Halle todas las raíces racionales de $x^3 - 3x^2 - x + 3$.

Problema 8. Liste los posibles ceros racionales para $f(x) = 4x^4 - x^2 + 3$.

Problema 9. Halle todas las raíces de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Problema 10. Demuestre cuántos ceros positivos tiene $P(x) = x^4 + x^2 + 1$.

Problema 11. Use la regla de Descartes en $g(x) = -x^5 - x^3 - x$.

Problema 12. Encuentre la raíz racional fraccionaria de $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

Problema 13. Liste los posibles ceros de $h(x) = 5x^5 - 2x^4 + x - 10$.

Problema 14. Factorice completamente $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$.

Problema 15. Aplique Descartes a $P(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$ y concluya.

Problema 16. Sabiendo que $x = -2$ es raíz de $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$, halle el resto.

Problema 17. Halle todas las raíces de $3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

Problema 18. Muestre por Descartes que $x^6 - 3x^2 - 1$ tiene exactamente una raíz positiva.

Problema 19. Resuelva la ecuación cuártica $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x = 0$.

Problema 20. Halle los ceros irracionales de $x^3 - 4x^2 + x + 2$ tras hallar el racional.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Un sismógrafo capta ondas tectónicas $T(s) = s^3 - 2s^2 - 5s + 6$. Ubique el segundo exacto donde la corteza terrestre recupera su estado de inercia basal cero.

Guía de Solución Interactiva

1. Posibles raíces a evaluar: $\pm 1, \pm$_____, $\pm 3, \pm$_____. 2. Evaluando $s = 1$: $1 -$ _____ $- 5 + 6 =$ _____. (Es raíz). 3. Sintética reduce a $s^2 - s -$ _____. Raíces finales: 1, _____, _____.

Problema 2. El dron oceánico consume voltios sumergiéndose $V(p) = p^3 + p^2 - 14p - 24$. Descubra la profundidad crítica 'p' requerida para anular la carga operativa del sistema marino.

Guía de Solución Interactiva

1. Descartes $V(p)$: 1 cambio $\implies$ _____ raíces positivas. 2. Descartes $V(-p)$: $-p^3 + p^2 + 14p - 24$. _____ cambios $\implies$ _____ o _____ raíces negativas. 3. Probando raíces, $p = 4$ arroja $64 + 16 - 56 - 24 =$ _____. Profundidad: _____ metros.

Problema 3. La tensión arquitectónica de un pilar es $F(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. Calcule los nodos de torsión donde la fatiga de los tensores de anclaje se neutraliza.

Guía de Solución Interactiva

1. Factorización como cuadrática: $(x^2 -$ _____$)(x^2 -$ _____$) = 0$. 2. Diferencia de cuadrados: $(x -$ _____$)(x +$ _____$)(x -$ _____$)(x +$ _____$) = 0$. 3. Los anclajes seguros están en las marcas $\pm$_____ y $\pm$_____.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La aerodinámica del bólido corta el viento $W(k) = 2k^3 - 3k^2 - 11k + 6$. Identifique el kilómetro específico donde la turbulencia del alerón decae a nivel cero absoluto.

Problema 5. El reactor termodinámico fluctúa marcando $R(c) = c^3 + 4c^2 + c - 6$ grados centígrados. Aísle las tres mediciones temporales exactas donde la fisión alcanza la barrera fría nula.

Problema 6. Una cepa bacteriana diezma colonias biológicas siguiendo $B(t) = t^3 - 7t + 6$. Precise las horas de observación estipuladas para documentar la extinción patógena total en el platillo.

Problema 7. El láser satelital ajusta su enfoque con $L(d) = 3d^3 - 10d^2 + d + 6$. Corrobore matemáticamente las distancias focales donde el haz de luz cruza la refracción cero.

Problema 8. La compuerta hidráulica drena litros perdiendo presión $P(v) = v^4 - 2v^3 - 7v^2 + 8v + 12$. Confirme los flujos volumétricos capaces de vaciar la presa sin estresar el conducto.

Problema 9. El brazo robótico desvía su pinza calibrando $A(z) = z^3 + 2z^2 - z - 2$. Derive las coordenadas mecánicas precisas para lograr agarre centrado en la matriz de ensamblaje.

Problema 10. Un software criptográfico agota memoria RAM procesando $M(k) = k^4 - 5k^2 + 4$. Descifre las secuencias binarias de interrupción de red que liberan la carga algorítmica eficientemente.

Problema 11. La meteorología registra tormentas de presión atmosférica $B(h) = 2h^3 - h^2 - 18h + 9$. Indique las altitudes hectopascales que neutralizan la cizalladura del huracán de manera natural.

Problema 12. El péndulo de Foucault oscila sumando rozamientos $F(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$. Declare los vectores de amplitud que congelan el mecanismo gravitatorio del domo terráqueo.

Problema 13. La logística portuaria moviliza cargas optimizando rutas $C(m) = m^3 - m^2 - 10m - 8$. Aclare los márgenes de estiba naval que promedian cero retrasos de contenedores transatlánticos.

Problema 14. Un lente óptico distorsiona fotones con error $E(p) = p^4 + p^3 - 7p^2 - p + 6$. Verifique las dioptrías cóncavas calibradas para corregir la visión miópica del paciente oftalmológico.

Problema 15. El sonar mapea cordilleras abisales graficando $S(d) = 4d^3 - 8d^2 - d + 2$. Ubique las hondonadas sísmicas exactas donde el eco ultrasónico penetra sin reflejar ruidos falsos.

Problema 16. Las antenas wifi pierden señal estructurando $W(s) = s^3 + 5s^2 + 2s - 8$. Detalle los sectores inalámbricos ciegos que exigen instalar enrutadores de red redundantes.

Problema 17. Un cultivo agrícola acidifica el suelo filtrando toxinas $T(n) = n^4 - 13n^2 + 36$. Justifique los miligramos de nitrógeno que estabilizan el pH de las raíces florales.

Problema 18. El transbordador agota plasma de escape $V(k) = 6k^3 - 11k^2 + 6k - 1$. Cuantifique los kilotonelajes eyectados cuando el propulsor entra en deriva espacial sostenida.

Problema 19. La aleación de titanio expande sus enlaces $M(c) = c^3 - 12c^2 + 47c - 60$. Establezca los umbrales de fundición centígrados que detienen la dilatación del fuselaje aéreo.

Problema 20. El mercado de divisas infla burbujas especulativas $E(y) = y^3 - 3y^2 - 4y + 12$. Pronostique los años de contracción económica que pincharán la deuda bursátil acumulada global.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 1/3, \pm 2/3, \pm 4/3$
2. $P(x)$ tiene 1 cambio $\implies$ 1 raíz pos.
3. $P(-x)$ tiene 2 cambios $\implies$ 2 o 0 neg.
4. Raíces: $1, 3, -1$.
5. Posibles: $\pm 1, \pm 3, \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 1/4, \pm 3/4$.
6. Raíces: $1, 2, 3$.
7. 0 cambios $\implies$ 0 raíces positivas.
8. 0 positivas, 0 negativas (todo complejo o 0).
9. Raíz racional: $3/2$ (además $2, -1$).
10. Posibles: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm 1/5, \ldots$
11. Raíces: $-2, -1, 1, 3$.
12. 3 o 1 positivas.
13. Resto $= 0$, raíces ± 2.
14. Raíces: $1, -2, -1/3$.
15. 1 cambio de signo $\implies$ 1 positiva.
16. Raíces: $0, 1, 2, -1$.
17. Racional: 2. Irracionales: $1 \pm \sqrt{2}$.
18. -
19. -
20. -

Propuestos de Aplicación

1. $s = 1, 3, -2$.
2. $p = 4$ metros.
3. $x = \pm 1, \pm 3$.
4. $k = 3, -2, 1/2$.
5. $c = 1, -2, -3$.
6. $t = 1, 2, -3$.
7. $d = 3, -1/3, 2$.
8. $v = 3, 2, -1, -2$.
9. $z = 1, -1, -2$.
10. $k = \pm 1, \pm 2$.
11. $h = 3, -3, 1/2$.
12. $x = 1, 3, 4$.
13. $m = 4, -2, -1$.
14. $p = 1, -1, 2, -3$.
15. $d = 2, 1/2, -1/2$.
16. $s = 1, -2, -4$.
17. $n = \pm 2, \pm 3$.
18. $k = 1, 1/2, 1/3$.
19. $c = 3, 4, 5$.
20. $y = 2, -2, 3$.

$\pm\frac{p}{q}$

¡Llegaste al Final!

'Un radar no detiene el obstáculo, solo te muestra dónde está. Descartes y los ceros racionales son tu radar; el trabajo duro de despejar el camino sigue siendo tuyo.'

- La visión de la persistencia

¡Felicidades! Has dominado las herramientas más avanzadas para predecir, localizar y atrapar las raíces ocultas de cualquier polinomio superior.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com