PRECÁLCULO

CEROS COMPLEJOS

CUADERNO DE TRABAJO

Teorema Fundamental y Raíces Conjugadas

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: El Universo Invisible

A veces, al graficar un polinomio, vemos que no cruza el eje X las suficientes veces para igualar su grado. ¿Dónde están las raíces faltantes? Flotando en una dimensión invisible: el plano complejo.

1. Teorema Fundamental del Álgebra

Todo polinomio $P(x)$ de grado $n \geq 1$ tiene al menos un cero en el sistema de números complejos. Como consecuencia directa (Teorema de Factorización Lineal), un polinomio de grado n tiene **exactamente n raíces** (contando multiplicidades) y puede factorizarse como:

$$P(x) = a_n(x - c_1)(x - c_2)\dots(x - c_n)$$

donde $c_1, c_2, \dots, c_n$ son números complejos (reales o imaginarios).

PROFE TEO

El Teorema Fundamental es el "Garantizador Universal". Te asegura que ningún polinomio te va a estafar: si su exponente mayor es 5, ¡tendrá exactamente 5 raíces! (algunas pueden estar repetidas).

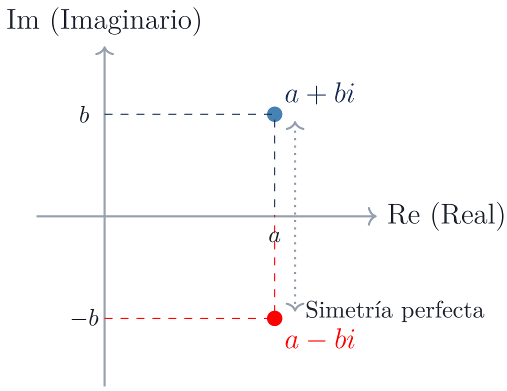
2. Teorema de las Raíces Conjugadas Complejas

Si un polinomio $P(x)$ tiene **coeficientes reales** y el número complejo $\boldsymbol{a + bi}$ es un cero de $P(x)$, entonces su conjugado complejo $\boldsymbol{a - bi}$ **también es un cero** de $P(x)$.

- Esto significa que los ceros imaginarios *siempre aparecen en pares*.
- Todo polinomio de grado IMPAR con coeficientes reales tiene, obligatoriamente, al menos una raíz real.

PROFE TEO

¡Las raíces complejas son como gemelos inseparables! Nunca verás un $3 + 2i$ caminando solo por la calle polinomial; su gemelo $3 - 2i$ siempre estará con él.



Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Completar las Raíces

Enunciado: Un polinomio de grado 3 con coeficientes reales tiene como raíces a 4 y $2i$. Halle la raíz faltante y construya el polinomio.
Solución: Por el teorema de raíces conjugadas, si $2i$ (que es $0 + 2i$) es raíz, su conjugado $-2i$ también lo es.
Factores: $(x - 4)(x - 2i)(x + 2i)$.
Multiplicamos los complejos: $(x-2i)(x+2i) = x^2-(2i)^2 = x^2-(-4) = x^2+4$.
Polinomio: $P(x) = (x - 4)(x^2 + 4) = x^3 - 4x^2 + 4x - 16$.

Problema Resuelto 2: Hallar Raíces Restantes

Enunciado: Dado $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$. Sabiendo que $2i$ es raíz, halle las demás.
Esquema de Solución: Como $2i$ es raíz, $-2i$ también. Su producto genera el factor $x^2 + 4$. Dividimos $P(x)$ entre $(x^2 + 4)$ mediante división larga:

$$\begin{array}{r|l} & x-3 \\ \hline x^2+4 & x^3-3x^2+4x-12 \\ & -(x^3+4x) \\ \hline & -3x^2-12 \\ & -(-3x^2-12) \\ \hline & 0 \end{array}$$

El cociente es $x - 3$, lo que indica la raíz real $x = 3$.
Respuesta: Las raíces son $2i, -2i, 3$.

Problema Resuelto 3: Uso de la Fórmula Conjugada

Enunciado: Construya un polinomio mónico de grado mínimo con raíces 1 y $3 - i$.
Solución: Raíces: $1, 3 - i$ y su conjugado $3 + i$.
Factor cuadrático de los complejos: $x^2 - 2(3)x + (3^2 + (-1)^2) = x^2 - 6x + 10$.
Polinomio: $P(x) = (x - 1)(x^2 - 6x + 10)$.
$P(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - x^2 + 6x - 10$.
Respuesta: $P(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 10$.

PROFE TEO
Multiplicar factores conjugados siempre destruye a la ï". Recuerda la fórmula $(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$. ¡Apréndetela de memoria!

Problema Resuelto 4: Factorización Compleja

Enunciado: Factorice completamente $f(x) = x^4 - 16$ en el campo de los números complejos $\mathbb{C}$.
Solución: Diferencia de cuadrados: $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$.
El primer paréntesis es real: $(x - 2)(x + 2)$.
El segundo paréntesis genera imaginarios: $x^2 = -4 \implies x = \pm 2i$.
Respuesta: $f(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$.

Problema Resuelto 5: Descomposición de Grado 4

Enunciado: Halle todos los ceros de $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = 0$ sabiendo que 1 es una raíz de multiplicidad 2.
Solución: Si $x = 1$ tiene multiplicidad 2, el factor es $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
Dividimos el polinomio original entre este cuadrático:

$$\begin{array}{r|l} & x^2+4 \\ x^2-2x+1 & \quad x^4-2x^3+5x^2-8x+4 \\ \hline \end{array}$$

El cociente exacto es $x^2 + 4$. Igualamos a cero: $x^2 = -4 \implies x = \pm 2i$.
Respuesta: Las raíces son $1, 1, 2i, -2i$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Física Cuántica

Contexto: Un estado energético oscila según $E(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5$. Si existe una fluctuación subatómica inestable en $2 - i$, determine la base real de energía constante.
Solución: Raíz compleja $2 - i \implies$ Conjugada $2 + i$. Factor: $x^2 - 4x + 5$.
Dividimos $E(x)$ entre $x^2 - 4x + 5$ y obtenemos $x - 1$.
Respuesta: La base de energía real constante se encuentra en $x = 1$.

Aplicación 2: Ingeniería Eléctrica

Contexto: La impedancia de un circuito altera su frecuencia en $Z(w) = w^4 - w^3 - w^2 - w - 2$. Sabiendo que $w = i$ anula la resonancia, halle el resto de frecuencias nulas.
Solución: Raíz $i \implies$ Conjugada $-i$. Factor: $w^2 + 1$.
Dividimos $Z(w)$ entre $(w^2 + 1)$ logrando $w^2 - w - 2$.
Factorizamos: $(w - 2)(w + 1)$.
Respuesta: Las otras frecuencias nulas son $-i, 2$ y -1.

Aplicación 3: Dinámica Aeroespacial

Contexto: El error orbital de un satélite modela $e(t) = t^3 - 2t^2 + 4t - 8$. Si sufre una desviación magnética imaginaria de $2i$, extraiga el instante de corrección real.
Solución: Raíz $2i \implies$ Conjugada $-2i$. El factor que generan es $t^2 + 4$.
Al dividir $e(t) \div (t^2 + 4)$, el cociente limpio es $t - 2$.
Respuesta: El instante real de corrección espacial ocurre en $t = 2$.

Aplicación 4: Criptografía Avanzada

Contexto: Un algoritmo de seguridad cifra accesos con $C(k) = k^4 + 3k^2 - 4$. Identifique todas las llaves de desencriptación operativas dentro del plano complejo informático.
Solución: Factorizamos como cuadrática: $(k^2 + 4)(k^2 - 1) = 0$.
Resolvemos $k^2 = -4 \implies k = \pm 2i$.
Resolvemos $k^2 = 1 \implies k = \pm 1$.
Respuesta: Las llaves son $1, -1, 2i, -2i$.

PROFE TEO
En la vida real, las raíces imaginarias suelen representar oscilaciones (como ondas de radio o vibraciones), mientras que las raíces reales representan cruces físicos o tiempos exactos.

Aplicación 5: Robótica Articular

Contexto: La vibración de un servomotor se rige por $O(a) = a^3 - 7a^2 + 17a - 15$. Si el amortiguador absorbe ondas en $2 + i$, deduzca el ángulo de estabilización física.
Solución: Raíz $2 + i \implies$ Conjugada $2 - i$. Generan $a^2 - 4a + 5$.
Dividimos $O(a) \div (a^2 - 4a + 5)$ obteniendo el factor $a - 3$.
Respuesta: El ángulo de estabilización real se da en $a = 3$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. ¿Por qué el Teorema Fundamental del Álgebra afirma que un polinomio de grado 4 podría no cruzar nunca el eje X real, pero uno de grado 5 siempre lo cruzará al menos una vez?
2. Si un polinomio tiene coeficientes imaginarios, como $P(x) = x^2 - ix + 2$, ¿el Teorema de las Raíces Conjugadas sigue funcionando? Justifique su respuesta.
3. Al multiplicar $(x - (a + bi))$ y $(x - (a - bi))$, el resultado es un trinomio cuadrático estrictamente con coeficientes reales. Explique matemáticamente por qué desaparece la parte imaginaria.
4. Un compañero afirma que $P(x) = x^3 - 8$ solo tiene una raíz $(x = 2)$ porque es la única que aparece en la calculadora. Refute su afirmación basándose en el TFA.
5. Si un polinomio de grado 6 posee las raíces $2 + 3i$ y $4 - i$, ¿cuál es la cantidad máxima de raíces puramente reales que podría tener?
6. ¿Qué diferencia conceptual existe entre factorizar un polinomio "sobre los números reales"versus factorizarlo "sobre los números complejos¿
7. Dado $f(x) = (x^2 + 9)^2$. ¿Cuántas raíces tiene en total y cuáles son sus multiplicidades en el plano complejo?
8. Explique la conexión entre el discriminante de la fórmula cuadrática $(\Delta < 0)$ y la aparición obligatoria de raíces conjugadas complejas.
9. Si conocemos que $3i$ es una raíz de un polinomio con coeficientes reales, ¿por qué es incorrecto decir que el polinomio es divisible entre $(x - 3i)$ para buscar las raíces reales sobrantes? ¿Qué deberíamos hacer primero?
10. En un contexto de ingeniería, si las raíces de una función de vibración resultan ser todas complejas, ¿qué nos indica esto sobre el comportamiento físico de la estructura analizada frente al reposo (cero real)?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Construya un polinomio de grado 2 con raíces $5i$ y $-5i$.

Guía de Solución Interactiva

1. Escribe los factores: $P(x) = (x - \_\_\_\_)(x + \_\_\_\_)$.
2. Aplica diferencia de cuadrados: $P(x) = x^2 - (\_\_\_\_)^2$.
3. Sabiendo que $i^2 = -1$: $P(x) = x^2 - (\_\_\_\_) \implies P(x) = x^2 + \_\_\_\_$.

Problema 2. Halle todas las raíces de $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ sabiendo que i es raíz.

Guía de Solución Interactiva

1. Si i es raíz, también lo es ____. El factor que generan es $(x^2 + \_\_\_\_)$.
2. Divide el polinomio entre dicho factor. $x^3 \div x^2 = \_\_\_\_$. Al terminar la división, el cociente es $(x - \_\_\_\_)$.
3. Las tres raíces completas son: ____, ____, ____.

Problema 3. Factorice $x^4 - 81$ completamente sobre $\mathbb{C}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Diferencia inicial: $(x^2 - \_\_\_\_)(x^2 + \_\_\_\_)$.
2. Factoriza los reales: $(x - \_\_\_\_)(x + \_\_\_\_)(x^2 + 9)$.
3. Factoriza los imaginarios: $(x - 3)(x + 3)(x - \_\_\_\_)(x + \_\_\_\_)$.

PROFE TEO
Usa la fórmula salvavidas: Factor cuadrático $= x^2 - 2(ParteReal)x + (Modulo)^2$. Ejemplo para $3 + 4i$: $x^2 - 6x + 25$.

Problemas Generales

Problema 4. Forme un polinomio de menor grado con raíces 2 y $3i$.

Problema 5. Halle las raíces de $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$ dado que $2i$ es raíz.

Problema 6. Construya un polinomio con raíz -1 y raíz $1 - i$.

Problema 7. Resuelva $x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 = 0$ sabiendo que i es cero.

Problema 8. Factorice completamente $x^3 + 27$ sobre los números complejos.

Problema 9. Encuentre todos los ceros de $f(x) = x^4 + 10x^2 + 9$.

Problema 10. Demuestre si $1 + 2i$ es raíz de $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Problema 11. Halle el polinomio de grado 4 con raíces i y $1 + i$.

Problema 12. Extraiga los ceros de $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8 = 0$ si $2i$ es raíz.

Problema 13. Factorice $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ en $\mathbb{C}$.

Problema 14. Halle el polinomio real de grado mínimo que tenga la raíz $2 - i\sqrt{3}$.

Problema 15. Resuelva $x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8 = 0$ dado que $1 + i$ es raíz doble.

Problema 16. Si $P(x)$ tiene grado 6 y raíces reales 1 y 2, ¿puede tener como raíces a $i, 2i, 3i$?

Problema 17. Halle todas las raíces de $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$.

Problema 18. Construya un polinomio donde 3 sea raíz multiplicidad 2 y $-i$ multiplicidad 1.

Problema 19. Factorice $2x^3 - 3x^2 + 18x - 27$ sabiendo que $3i$ es una raíz.

Problema 20. Halle las raíces complejas de $x^6 - 1 = 0$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La acústica de un auditorio rebota frecuencias $A(f) = f^3 - 3f^2 + 4f - 12$. Un eco fantasma marca $2i$. Identifique el tono real primario.

Guía de Solución Interactiva

1. Eco $2i$ implica el conjugado _____. Factor: $f^2 +$ _____. 2. Dividiendo: $(f^3 - 3f^2 + 4f - 12) \div (f^2 + 4) = f -$ _____. 3. El tono base acústico real ocurre en $f =$ _____.

Problema 2. Un láser óptico dispersa luz en $O(L) = L^3 - 4L^2 + 13L$. Conociendo una difracción imaginaria de $2 + 3i$, aísle el haz central lumínico.

Guía de Solución Interactiva

1. Difracción conjugada: _______. Cuadrático: $L^2 -$ _____ $L + 13$. 2. Factorizamos la 'L' inicialmente: $L(L^2 - 4L +$ _____$) = 0$. 3. El haz de luz puro real impacta en la cota $L =$ _____.

Problema 3. Un motor termodinámico pierde presión $P(v) = v^3 - 2v^2 + v - 2$. Sabiendo que una válvula vibra en i, fije el volumen estable constante.

Guía de Solución Interactiva

1. Conjugado térmico _____, divisor armónico $v^2 +$ _____. 2. Ejecutamos división polinomial: $P(v) \div (v^2 + 1) =$ _____ $- 2$. 3. El volumen volumétrico estable es $v =$ _____.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una reserva forestal reporta biomasa $B(t) = t^3 - 6t^2 + 13t - 10$. Detectando un hongo parasitario fluctuante en $2+i$, determine la tasa de crecimiento orgánico real.

Problema 5. La falla sísmica oscila reportando ondas $S(m) = m^4 - m^3 + 2m^2 - 4m - 8$. Si el temblor ilusorio marca $2i$, extraiga las magnitudes tectónicas veraces registradas.

Problema 6. La mutación de un genoma sigue $G(c) = c^3 - c^2 + 4c - 4$. Sabiendo que el enlace fantasma es $2i$, revele la hélice cromosómica primaria intacta.

Problema 7. Una matriz demográfica preveía migración $M(p) = p^4 + 5p^2 - 36$. Localice todos los vectores poblacionales complejos que descartan la expansión urbana simulada del modelo matemático.

Problema 8. El algoritmo predictivo crashea en $A(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 6$. Conociendo un error de compilación $1 + i$, halle el bucle de ejecución operativo correcto.

Problema 9. El blindaje magnético rechaza iones según $M(q) = q^3 - 3q^2 + q + 5$. La radiación solar desvía $1 - 2i$. Declare la carga elemental polarizada estabilizadora instalada.

Problema 10. Un ciclón meteorológico agita vientos $V(r) = r^4 - 2r^3 + 6r^2 - 8r + 8$. Sabiendo que el ojo falso traza $1 + i$, confirme las ráfagas atmosféricas persistentes.

Problema 11. Las microondas de telecomunicaciones generan ruidos $T(f) = f^4 + 10f^2 + 9$. Descifre el cuarteto de frecuencias imaginarias que saturan el canal del enrutador de banda ancha.

Problema 12. La armadura de acero de un puente sufre tensión $E(v) = v^3 - 8v^2 + 25v - 26$. Si un remache vibra en $3 + 2i$, aclare la carga vehicular máxima.

Problema 13. Un biorreactor ecológico asimila residuos en $E(k) = k^3 - k^2 + 9k - 9$. Una toxina volátil marca $3i$. Precise el ritmo de descomposición química aprovechable purificada.

Problema 14. La aleación de tungsteno cristaliza según $Q(c) = c^4 - c^3 - 2c^2 - 4c - 24$. El enfriamiento rápido añade fracturas $2i$. Evalúe los templos térmicos funcionales metalúrgicos.

Problema 15. El púlsar astrofísico irradia partículas $A(t) = t^3 - 4t^2 + 14t - 20$. Un efecto Doppler aparente dicta $1 + 3i$. Confirme los milenios de luz remanentes del núcleo colapsado.

Problema 16. Un submarino pierde flotabilidad calculando pesos $N(d) = d^4 + 2d^3 + d^2 + 8d - 12$. La corriente submarina anómala es $-1 + i\sqrt{3}$. Resuelva el lastre gravitacional crítico exigido.

Problema 17. La urdimbre de un telar industrial traba hilos $T(h) = h^3 - 6h^2 + 13h - 10$. El carrete atascado traza $2 - i$. Precise la bobina textil sin defectos enlazada.

Problema 18. Una presa hidrológica libera metros cúbicos $H(c) = c^4 - 4c^3 + 8c^2 - 16c + 16$. El sifón lateral absorbe vibraciones $2i$. Cuantifique los torrentes hídricos abiertos en cauce.

Problema 19. La aleación de cobre oxida moléculas $O(n) = 2n^3 - n^2 + 8n - 4$. Un isótopo inestable interviene con $2i$. Encuentre el grado de corrosión ácida detenido exitosamente.

Problema 20. El mercado de capitales indexa volatilidad en $E(v) = v^4 - 6v^3 + 14v^2 - 16v + 8$. Detectando un pánico especulativo gemelo $1 - i$, garantice las tasas inflacionarias reales estáticas.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $x^2 + 25$.
2. $i, -i, 3$.
3. $(x-3)(x+3)(x-3i)(x+3i)$.
4. $x^3 - 2x^2 + 9x - 18$.
5. $2i, -2i, 2$.
6. $x^3 - x^2 + 2$.
7. $i, -i, 3, -2$.
8. $(x+3)(x - \frac{3+3i\sqrt{3}}{2})(x - \frac{3-3i\sqrt{3}}{2})$.
9. $\pm i, \pm 3i$.
10. Evaluando da 0. Es raíz.
11. $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$.
12. $2i, -2i, 1+i, 1-i$.
13. $(x-1)(x-i)(x+i)(x-\omega)(x-\bar{\omega})$.
14. $x^2 - 4x + 7$.
15. $1+i, 1-i$ (ambas dobles).
16. No (complejos van de a 2, faltaría espacio).
17. $-1, i, -i$.
18. $x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$.
19. $3i, -3i, 3/2$.
20. $\pm 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Propuestos de Aplicación

1. Frecuencia base $f = 3$.
2. Impacto en la cota $L = 0$.
3. Volumen constante $v = 2$.
4. Tasa de crecimiento $t = 2$.
5. Magnitudes veraces $m = 2, m = -1$.
6. Hélice cromosómica intacta $c = 1$.
7. Vectores complejos $\pm 2i, \pm 3i$.
8. Bucle correcto $x = 3$.
9. Carga instalada $q = -1$.
10. Ráfagas persistentes nulas (raíces dobles complejas).
11. Frecuencias saturantes $\pm i, \pm 3i$.
12. Carga máxima vehicular $v = 2$.
13. Descomposición $k = 1$.
14. Templos térmicos funcionales $c = 3, c = -2$.
15. Milenios restantes $t = 2$.
16. Lastre gravitacional $d = 1, d = -2$.
17. Bobina textil $h = 2$.
18. Torrentes $c = 2$ (raíz doble).
19. Grado de corrosión $n = 1/2$.
20. Tasas estáticas falsas (todas complejas $1 \pm i, 2 \pm 2i$).

¡Llegaste al Final!

'Lo que no podemos ver en el plano físico no significa que no exista. Los números complejos están ahí, equilibrando la balanza invisible del universo matemático.'

- La simetría del conjugado

¡Felicidades! Has completado el rompecabezas algebraico más grande de todos. Ahora entiendes que cada ecuación siempre guarda la cantidad exacta de secretos que promete su grado.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com