PRECÁLCULO

CATÁLOGO DE FUNCIONES

CUADERNO DE TRABAJO

Gráficas de Funciones Elementales

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

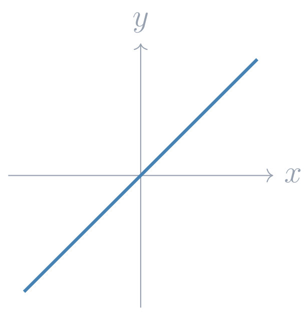
Teoría: Las Piezas de Construcción del Cálculo

Así como en la química existen los elementos en una tabla periódica, en las matemáticas existen las **funciones básicas o elementales**. Cualquier gráfica compleja que veas en cálculo o ciencias es, en realidad, una modificación (traslación, estiramiento o reflexión) de estas seis funciones madre.

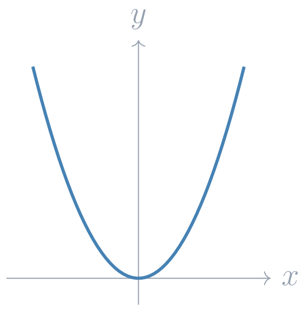
PROFE TEO
¡Aprende estas formas de memoria! Si sabes cómo se ve la función original, podrás graficar cualquier alteración en segundos sin necesidad de tabular números aburridos.

1. Función Identidad y Función Cuadrática

- **Identidad $f(x) = x$:** Es una línea recta perfecta a 45°. El valor de entrada es exactamente igual al de salida. Dom $= \mathbb{R}$, Ran $= \mathbb{R}$.
- **Cuadrática $f(x) = x^2$:** Su gráfica es una **parábola** con vértice en el origen. Es simétrica respecto al eje y (función par). Dom $= \mathbb{R}$, Ran $= [0, \infty)$.



$f(x) = x$

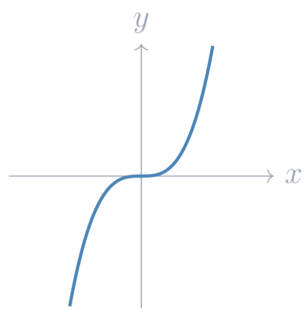


$f(x) = x^2$

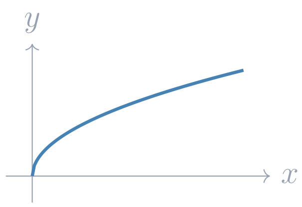
2. Función Cúbica y Función Raíz Cuadrada

- **Cúbica $f(x) = x^3$:** Crece hacia el infinito positivo y decrece hacia el infinito negativo. Es simétrica respecto al origen (función impar). Dom $= \mathbb{R}$, Ran $= \mathbb{R}$.
- **Raíz Cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$:** Es la mitad superior de una parábola acostada. No acepta números negativos. Dom $= [0, \infty)$, Ran $= [0, \infty)$.

PROFE TEO
¡Ojo con la raíz cuadrada! Muchos creen que $\sqrt{9}$ es ± 3. ¡Falso! Como función, $\sqrt{x}$ solo devuelve el valor principal positivo. Solo dibujamos el "brazo"de arriba.



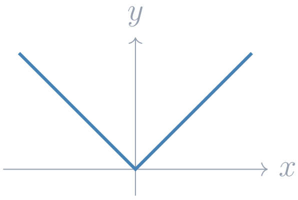
$f(x) = x^3$



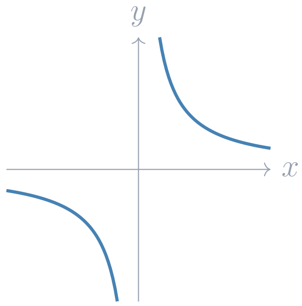
$f(x) = \sqrt{x}$

3. Función Valor Absoluto y Función Recíproca

- **Valor Absoluto $f(x) = |x|$:** Tiene forma de "V". Convierte cualquier entrada negativa en positiva. El vértice está en el origen. Dom $= \mathbb{R}$, Ran $= [0, \infty)$.
- **Recíproca $f(x) = 1/x$:** Su gráfica es una **hipérbola** con dos brazos. Tiene asíntotas en los ejes (no toca $x = 0$ ni $y = 0$). Dom $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Ran $= \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



$f(x) = |x|$



$f(x) = 1/x$

PROFE TEO
En la función recíproca $1/x$, la gráfica se rompe."en el cero. Esto se llama *discontinuidad asintótica*. A medida que te acercas a 0, la gráfica explota hacia el infinito.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Evaluación y Transformación

Enunciado: Dada la función básica $f(x) = x^2$, evalúe y simplifique la expresión $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
Solución: $f(a+h) = (a+h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$.
Sustituyendo: $\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h}$.
Factorizando h: $\frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$.

Problema Resuelto 2: Dominio de Combinaciones

Enunciado: Determine el dominio de la función $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x|-2}$.
Solución: Condición de la raíz: $x \geq 0$.
Condición del denominador: $|x| - 2 \neq 0 \implies |x| \neq 2 \implies x \neq 2$ y $x \neq -2$.
Intersectando: Como $x \geq 0$, ignoramos $x = -2$. Quitamos solo el 2.
Dominio: $[0, 2) \cup (2, \infty)$.

Problema Resuelto 3: Intersección de Curvas Elementales

Enunciado: Halle los puntos de intersección entre la cuadrática $y = x^2$ y la raíz cuadrada $y = \sqrt{x}$.
Solución: Igualamos: $x^2 = \sqrt{x}$. Elevamos al cuadrado: $x^4 = x \implies x^4 - x = 0$.
Factorizamos: $x(x^3 - 1) = 0$. Soluciones reales: $x = 0$ y $x = 1$.
Sustituyendo en y: Para $x = 0, y = 0$. Para $x = 1, y = 1$.
Puntos: $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

PROFE TEO
En el Problema 3, jamás dividas la ecuación entre x. Si lo haces, ¡pierdes matemáticamente la solución $x = 0$! Siempre factoriza.

Problema Resuelto 4: Ecuaciones con Valor Absoluto

Enunciado: Resuelva la ecuación $|2x - 3| = x$.
Solución: El lado derecho debe ser no negativo: $x \geq 0$.
Caso 1: $2x - 3 = x \implies x = 3$. (Válido porque $3 \geq 0$).
Caso 2: $2x - 3 = -x \implies 3x = 3 \implies x = 1$. (Válido porque $1 \geq 0$).
Conjunto solución: $\{1, 3\}$.

Problema Resuelto 5: Análisis de Paridad

Enunciado: Demuestre algebraicamente que el producto de la función recíproca y la función identidad genera una función par, mientras $x \neq 0$.
Solución: Sean $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = x$. Su producto es $h(x) = \left(\frac{1}{x}\right)(x) = 1$.
Evaluamos paridad $h(-x)$: Como $h(-x) = 1$, resulta que $h(-x) = h(x)$.
Por lo tanto, es una función par (su gráfica es una recta horizontal con un "hueco.$^{\text{en}}$ $x = 0$, simétrica al eje y).

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Cinemática Orbital

Contexto: La desviación de un satélite sigue una función cuadrática $D(t) = t^2$, donde t es el tiempo en minutos. Halle el incremento de desviación exacto al pasar del minuto 3 al minuto 4.
Solución: Calculamos las posiciones: $D(4) = 4^2 = 16$. $D(3) = 3^2 = 9$.
Incremento: $D(4) - D(3) = 16 - 9 = 7$.
Respuesta: La desviación se incrementa en 7 unidades.

Aplicación 2: Economía a Escala

Contexto: El costo unitario de fabricar procesadores se modela mediante la función recíproca $C(x) = \frac{5000}{x}$, con x en miles de unidades. Determine el costo si se fabrican 20 mil unidades.
Solución: Sustituimos directamente $x = 20$.
$C(20) = \frac{5000}{20} = 250$.
Respuesta: El costo unitario se reduce a 250 dólares por procesador, ilustrando la asíntota económica.

Aplicación 3: Cristalografía

Contexto: El volumen de una estructura cúbica microscópica cristaliza bajo la ley volumétrica $V(L) = L^3$, donde L es el lado en micrómetros. Calcule la arista si el volumen medido es 64 micrómetros cúbicos.
Solución: Planteamos: $L^3 = 64$.
Extraemos raíz cúbica: $L = \sqrt[3]{64} = 4$.
Respuesta: La arista del cristal mide exactamente 4 micrómetros.

PROFE TEO
Las funciones recíprocas modelan muy bien situaciones donde "más de algo"significa "menos del otro", como velocidad y tiempo, o producción y costo unitario.

Aplicación 4: Tolerancia Mecánica

Contexto: El error permitido en el grosor de un engranaje está dictado por $|x - 5| = 0{,}2$ milímetros, siendo x la medida real. Encuentre los espesores máximo y mínimo permitidos.
Solución: Propiedad de valor absoluto: $x - 5 = 0{,}2$ o $x - 5 = -0{,}2$.
$x = 5{,}2$ o $x = 4{,}8$.
Respuesta: El espesor máximo es 5.2 mm y el mínimo 4.8 mm.

Aplicación 5: Propagación de Ondas

Contexto: El tiempo que tarda un pulso sísmico en llegar a la superficie se estima con $T(p) = \sqrt{p}$, donde p es la profundidad en metros. Determine la profundidad si el pulso tarda 15 milisegundos.
Solución: Ecuación: $\sqrt{p} = 15$.
Elevamos al cuadrado para despejar: $(\sqrt{p})^2 = 15^2 \implies p = 225$.
Respuesta: La onda se origina a 225 metros de profundidad.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos analíticos o visuales.

1. Al observar la gráfica de la función recíproca $f(x) = 1/x$, ¿por qué es lógicamente imposible que la curva cruce el eje y?
2. Compare el crecimiento en el intervalo $[0, 1]$ entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$. ¿Cuál gráfica está por encima de la otra y por qué?
3. Explique por qué el valor absoluto $f(x) = |x|$ puede escribirse como una función definida a trozos usando la función identidad.
4. La gráfica cúbica $y = x^3$ parece aplanarse cerca del origen. ¿Significa esto que la función es constante en $x = 0$? Argumente.
5. Si evaluamos $\sqrt{x^2}$, ¿el resultado es idéntico a la función identidad $f(x) = x$ o a la función valor absoluto $f(x) = |x|$? Justifique con números negativos.
6. Geométricamente, ¿qué simetría posee la función recíproca respecto a los cuadrantes del plano cartesiano?
7. Deduzca por qué la intersección entre $y = x^3$ y $y = x$ ocurre en tres puntos distintos, a diferencia de la intersección con la cuadrática.
8. Analice el dominio de la función combinada $h(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$. ¿Qué valores quedan excluidos y por qué?
9. Si multiplicamos la función cuadrática por un número negativo constante, ¿qué transformación visual sufre su gráfica clásica de Ü¿
10. Justifique por qué la función raíz cuadrada no es considerada ni función par ni función impar.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Evalúe la función cúbica $f(x) = x^3$ para $x = -2$ y $x = 3$.

Guía de Solución Interactiva

1. Sustituye -2: $f(-2) = (\_\_\_\_\_)^3 = \_\_\_\_\_$.
2. Sustituye 3: $f(3) = (\_\_\_\_\_)^3 = \_\_\_\_\_$.
3. La distancia vertical entre ambos puntos es: $\_\_\_\_\_ - (\_\_\_\_\_) = \_\_\_\_\_$.

Problema 2. Halle el dominio de la función $g(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$.

Guía de Solución Interactiva

1. La parte recíproca exige que $x \neq \_\_\_\_\_$.
2. La raíz cuadrada exige que $x \geq \_\_\_\_\_$.
3. Intersectando, el dominio final es $x\_\_\_\_\_0$. En intervalo: $(\_\_\_\_\_, \infty)$.

Problema 3. Resuelva la ecuación $\sqrt{x} = 4$.

Guía de Solución Interactiva

1. Eleva ambos lados al cuadrado: $(\sqrt{x})^2 = (\_\_\_\_\_)^2$.
2. Simplifica la potencia y la raíz: $x = \_\_\_\_\_$.
3. Comprobación: $\sqrt{\_\_\_\_\_} = 4$. ¿Es correcto? __________.

PROFE TEO
Jamás olvides comprobar las soluciones en una ecuación que involucre raíces. A veces, al elevar al cuadrado, se generan "soluciones fantasmas"que no cumplen la ecuación original.

Problemas Generales (Nivel Medio a Avanzado)

Problema 4. Evalúe $f(x) = x^2$ para $x = 2\sqrt{3}$.

Problema 5. Si $f(x) = 1/x$, halle $f(1/5) + f(-2)$.

Problema 6. Halle las intersecciones entre $y = |x|$ y $y = 5$.

Problema 7. Resuelva la ecuación $x^3 = -27$.

Problema 8. Determine el dominio de $h(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-9}$.

Problema 9. Encuentre los puntos donde se cortan $f(x) = x^2$ y $g(x) = 4$.

Problema 10. Simplifique la expresión para $f(x) = |x|$ si sabemos que $x < -5$.

Problema 11. Halle el rango de la función $g(x) = x^2 + 7$.

Problema 12. Resuelva la ecuación $|3x - 1| = 8$.

Problema 13. Simplifique $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ para $f(x) = x^2$.

Problema 14. Determine el dominio de $y = \frac{1}{|x|-4}$.

Problema 15. Resuelva la ecuación cuadrática-radical $x - \sqrt{x} - 6 = 0$. (Sugerencia: cambio de variable).

Problema 16. Calcule el área del triángulo formado por el eje x y las rectas que forman la función $y = 6 - |x|$.

Problema 17. Halle los puntos de corte entre $y = x^3$ y $y = 4x$.

Problema 18. Resuelva la desigualdad $1/x > 2$.

Problema 19. Determine el rango de la función recíproca modificada $y = \frac{1}{x^2}$.

Problema 20. Simplifique algebraicamente la expresión $\sqrt{x^2 - 4x + 4}$ usando la función valor absoluto.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La energía cinética de un vehículo se calcula como $E(v) = 2v^2$ julios. Determine la energía si su velocidad v es 5 m/s.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica el valor a reemplazar: $v =$ _____. 2. Evalúa en la función: $E(5) = 2(\_\_\_\_\_)^2 = 2(\_\_\_\_\_)$. 3. Resultado final: _____ julios.

Problema 2. La intensidad de una señal wifi decae por la ley recíproca $I(d) = \frac{100}{d}$. Si la intensidad requerida es 4 unidades, halle la distancia máxima d.

Guía de Solución Interactiva

1. Iguala la función: _____ $= \frac{100}{d}$. 2. Despeja multiplicando por d: $4d =$ _____. 3. Divide: $d =$ _____ metros.

Problema 3. Un termostato tiene una desviación admisible modelada por $|T - 22| = 3$, donde T es la temperatura en Celsius. Halle las temperaturas límites.

Guía de Solución Interactiva

1. Separa el absoluto en dos casos: $T - 22 =$ _____ o $T - 22 =$ _____. 2. Resuelve ambos: $T =$ _____ o $T =$ _____. 3. Las temperaturas límites son _____°C y _____°C.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. Una constructora estima los sacos de cemento para pilares usando $C(h) = h^3$, con h como altura en metros. Si necesitan 125 sacos, calcule la altura.

Problema 5. El campo visual de una cámara se rige por $V(r) = r^2$. Determine el radio exacto necesario para abarcar un área de escaneo de 144 metros cuadrados.

Problema 6. La densidad poblacional de una bacteria sigue el modelo identidad $D(t) = t$. ¿En qué día la población coincidirá exactamente con el número de días transcurridos?

Problema 7. El desgaste en un disco de corte industrial obedece a $W(x) = \sqrt{x}$, siendo x los cortes realizados. ¿Cuántos cortes causan un desgaste de 9 unidades?

Problema 8. En hidrodinámica, el vaciado del tanque A demora $T(v) = \frac{60}{v}$ minutos. Halle el volumen v por segundo necesario para vaciarlo en 5 minutos.

Problema 9. El umbral de error de un GPS se define por $|x - 100| = 5$ metros. Determine la posición más alejada permitida por esta tecnología satelital.

Problema 10. Un contenedor de carga refrigerado evalúa su masa térmica con $M(k) = k^3$. Si la masa óptima marca 216 kilogramos, halle el factor térmico k.

Problema 11. La fricción aerodinámica sobre un fuselaje sigue $F(v) = v^2/4$. Encuentre la velocidad del viento v que genera una fuerza de fricción de 25 Newtons.

Problema 12. Un software de minería criptográfica reduce la rentabilidad por servidor mediante $R(n) = \frac{1000}{n}$. Calcule la cantidad de nodos n para una rentabilidad de 50 tokens.

Problema 13. La altura de un globo aerostático cautivo se mide con la raíz cuadrada $H(p) = 20\sqrt{p}$. Calcule la presión del quemador p para volar a 100 metros.

Problema 14. El diseño simétrico de un tejado responde a la función valor absoluto $y = 12 - |x|$. Determine la anchura total de la base apoyada en el suelo.

Problema 15. Una turbina genera energía eólica proporcional al cubo de la velocidad del aire, $E(v) = v^3$. Si la energía es 343 Megavatios, halle la velocidad del viento.

Problema 16. El tiempo focal de una lente convexa sigue $T(d) = \frac{1}{|d|}$. Halle las distancias focales d que logran un tiempo de captura de 0.25 milisegundos.

Problema 17. Un analista proyecta ventas usando la intersección entre $V_1(x) = x^2$ y un pronóstico constante $V_2 = 81$. Halle el mes x donde ambas proyecciones empatan.

Problema 18. La concentración de un reactivo químico disuelto disminuye en proporción $C(t) = \frac{1}{t^2}$. Determine en qué minuto exacto la concentración es de 0.04 moles por litro.

Problema 19. La altitud de una rampa para deportes extremos dibuja un perfil de $y = \sqrt{4x}$. Calcule la distancia horizontal x requerida para una altura de 6 metros.

Problema 20. La diferencia de potencial en un circuito integrado oscila bajo la forma $|V - 5| = 1{,}5$ voltios. Identifique el rango de voltajes que alimentan el procesador.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $f(-2) = -8, f(3) = 27, \Delta = 35$
2. $(0, \infty)$
3. $x = 16$
4. 12
5. 4,5
6. $(\pm 5, 5)$
7. $x = -3$
8. $[0, 9) \cup (9, \infty)$
9. $(2, 4), (-2, 4)$
10. $f(x) = -x$
11. $[7, \infty)$
12. $x = 3, x = -7/3$
13. $2x + h$
14. $\mathbb{R} \setminus \{4, -4\}$
15. $x = 9$ (se descarta raíz -2)
16. 36 unidades cuadradas
17. $(0, 0), (2, 8), (-2, -8)$
18. $(0, 1/2)$
19. $(0, \infty)$
20. $|x - 2|$

Propuestos de Aplicación

1. 50 julios
2. 25 metros
3. 25°C y 19°C
4. 5 metros
5. 12 metros
6. En todos los días, $t = t$.
7. 81 cortes
8. 12 litros/seg
9. 105 metros
10. $k = 6$
11. $v = 10$ m/s
12. $n = 20$ nodos
13. $p = 25$ unidades
14. 24 metros
15. 7 m/s
16. $d = \pm 4$ mm
17. Mes 9
18. Minuto 5
19. 9 metros
20. De 3,5 a 6,5 voltios

(x, y)

¡Llegaste al Final!

'Un buen ingeniero no memoriza miles de curvas complejas; un maestro comprende las seis curvas elementales y cómo el universo baila al son de sus variaciones.'

- El dominio de las formas

¡Felicidades! Ahora tienes el radar matemático encendido. Al ver cualquier fenómeno en la naturaleza, ya sabrás qué función básica está escondida detrás.

∞

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com