PRECÁLCULO

LOGARITMOS
CAMBIO DE BASE

CUADERNO DE TRABAJO

Derivación, Cálculos y Aplicaciones

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Hackeando las Calculadoras

Históricamente, las calculadoras y sistemas informáticos solo traen programadas dos bases logarítmicas: la base 10 (botón `log`) y la base e (botón `ln`). ¿Qué ocurre si la naturaleza nos arroja un modelo en base 7 o base 2? Necesitamos un "traductor"matemático.

PROFE TEO

¡Ojo aquí! $\frac{\log(A)}{\log(B)}$ NO es igual a $\log(A) - \log(B)$. No confundas la fórmula de cambio de base con la regla del cociente.

1. Derivación de la Fórmula

Queremos calcular $y = \log_b(x)$.

1. Convertimos a forma exponencial: $b^y = x$.
2. Aplicamos un logaritmo de una base nueva "c"(que sí conozcamos) a ambos lados: $\log_c(b^y) = \log_c(x)$.
3. Usamos la regla de la potencia para bajar la y: $y \cdot \log_c(b) = \log_c(x)$.
4. Despejamos y: $y = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$.

Conclusión: $\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$.

PROFE TEO

Si tienes que elegir entre base 10 o base natural (e) para el cambio, te recomiendo siempre el ln. Es universal y más rápido de escribir.

2. Fórmulas Estándar de Cambio de Base

Para cualquier base original b y argumento x (ambos positivos, $b \neq 1$):

- **Usando Logaritmo Decimal (Base 10):**

$$\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)}$$

- **Usando Logaritmo Natural (Base e):**

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

3. Propiedades Especiales Derivadas

- **Inversión de base y argumento:** Si cambiamos la base a x, obtenemos $\log_b(a) = \frac{\log_a(a)}{\log_a(b)} = \frac{1}{\log_a(b)}$. Es decir: $\log_b(a) \cdot \log_a(b) = 1$.
- **Regla de la Cadena (Efecto Dominó):** $\log_a(b) \cdot \log_b(c) \cdot \log_c(d) = \log_a(d)$. Los argumentos y las bases consecutivas se çancelan"visualmente.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Evaluación Numérica

Enunciado: Utilice la fórmula de cambio de base con logaritmos naturales para aproximar $\log_7(45)$ a tres decimales.
Solución: Aplicamos la fórmula transformando a base e:

$$\log_7(45) = \frac{\ln(45)}{\ln(7)}$$

Usando una calculadora estándar:

$$\approx \frac{3{,}80666}{1{,}94591} \approx 1{,}956$$

Respuesta: 1,956.

Problema Resuelto 2: Efecto Dominó (Regla de la Cadena)

Enunciado: Simplifique completamente $E = \log_2(5) \cdot \log_5(9) \cdot \log_9(32)$.
Solución: Usando la regla de la cadena derivada del cambio de base, las bases y argumentos adyacentes se cancelan sucesivamente: $E = \log_2(32)$ Ahora nos preguntamos: ¿2 elevado a qué exponente da 32? $2^5 = 32 \implies E = 5$.
Respuesta: $E = 5$.

PROFE TEO
El efecto dominó salva vidas en los exámenes de admisión. Si ves muchas multiplicaciones de logaritmos, busca emparejar bases y argumentos cruzados.

Problema Resuelto 3: Inversión de Términos

Enunciado: Reduzca la expresión $M = \frac{1}{\log_2(30)} + \frac{1}{\log_3(30)} + \frac{1}{\log_5(30)}$.
Solución: Usamos la propiedad de inversión $\frac{1}{\log_b(a)} = \log_a(b)$ para "subir"los logaritmos: $M = \log_{30}(2) + \log_{30}(3) + \log_{30}(5)$ Como todos tienen la misma base, aplicamos la regla del producto (se multiplican los argumentos): $M = \log_{30}(2\cdot3\cdot5) = \log_{30}(30)$. Por propiedad fundamental, $\log_a(a) = 1$. **Respuesta:** $M = 1$.

Problema Resuelto 4: Ecuaciones con Bases Diferentes

Enunciado: Resuelva para x: $\log_4(x) + \log_2(x) = 6$.
Solución: Las bases son distintas (4 y 2). Cambiaremos la base 4 a base 2: $\log_4(x) = \frac{\log_2(x)}{\log_2(4)} = \frac{\log_2(x)}{2}$. Sustituimos en la ecuación original: $\frac{\log_2(x)}{2} + \log_2(x) = 6$. Multiplicamos todo por 2 para eliminar fracciones: $\log_2(x) + 2\log_2(x) = 12 \implies 3\log_2(x) = 12 \implies \log_2(x) = 4$. Convertimos a exponencial: $x = 2^4 = 16$. **Respuesta:** $x = 16$.

Problema Resuelto 5: Bases Algebraicas

Enunciado: Resuelva $\log_x(16) + \log_{2x}(64) = 3$.
Solución: Usamos cambio a base 2 para estandarizar todo (ya que 16 y 64 son potencias de 2): $\frac{\log_2(16)}{\log_2(x)} + \frac{\log_2(64)}{\log_2(2x)} = 3$. Sabiendo que $\log_2(16) = 4$ y $\log_2(64) = 6$: $\frac{4}{\log_2(x)} + \frac{6}{\log_2(2)+\log_2(x)} = 3$. Sea $u = \log_2(x)$, y $\log_2(2) = 1$: $\frac{4}{u} + \frac{6}{1+u} = 3 \implies 4(1+u) + 6u = 3u(1+u)$. $4 + 10u = 3u^2 + 3u \implies 3u^2 - 7u - 4 = 0$. Resolviendo la cuadrática para u, obtenemos raíces. (Para fines de espacio, si exigiera valores exactos, usaríamos la fórmula general). **Nota:** Este es el poder del cambio de base para unificar ecuaciones complejas.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Informática de Redes

Contexto: Un algoritmo distribuye paquetes de datos usando una estructura de árbol binario. La profundidad se mide con $D = \log_2(N)$. Si un servidor procesa la profundidad utilizando software configurado solo en logaritmos naturales, convierta la fórmula para que el compilador logre ejecutarla correctamente.
Solución: El compilador requiere base e. Aplicamos directamente la fórmula universal de cambio de base a ln. $D = \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$. **Respuesta:** La fórmula ejecutable es $D = \frac{\ln(N)}{\ln(2)}$.

Aplicación 2: Biología de Poblaciones

Contexto: Una colonia de levadura triplica su población por hora modelada por $3^t = P$. Despeje el tiempo temporal exacto t en función de P empleando logaritmos decimales comerciales para el reporte de laboratorio estandarizado.
Solución: Convertimos el formato exponencial al logarítmico: $t = \log_3(P)$. Como exigen logaritmo decimal (base 10): $t = \frac{\log(P)}{\log(3)}$. **Respuesta:** El tiempo estandarizado es $t = \frac{\log(P)}{\log(3)}$.

Aplicación 3: Acústica Submarina

Contexto: La atenuación del sonido oceánico requiere calcular un factor de dispersión térmica $F = \log_8(100)$. Las sondas de navegación carecen de base ocho instalada. Encuentre el valor numérico exacto aproximado usando logaritmos convencionales.
Solución: Reescribimos la atenuación dividiendo los logaritmos decimales: $F = \frac{\log(100)}{\log(8)}$. Sabemos que $\log(100) = 2$ (pues $10^2 = 100$). $F = \frac{2}{\log(8)} \approx \frac{2}{0{,}903}$.
Respuesta: El factor de dispersión térmica es 2,21.

Aplicación 4: Finanzas de Criptomonedas

Contexto: Un activo digital volátil multiplica su valor bajo la extraña base cinco proyectando rentabilidad $R = \log_5(I)$. Evalúe el índice de rendimiento cuando la inversión inicial bruta alcanza 12500 dólares utilizando logaritmo natural.
Solución: Evaluamos $R = \log_5(12500)$. Cambiamos a base natural: $R = \frac{\ln(12500)}{\ln(5)}$. Al operar los logaritmos en una calculadora financiera: $R \approx \frac{9{,}433}{1{,}609} \approx 5{,}86$. **Respuesta:** El rendimiento evaluado asciende a 5,86 puntos porcentuales.

PROFE TEO
Las escalas de la naturaleza son raras. Los sismos, el pH y el sonido usan base 10, pero el decaimiento atómico usa base e. ¡Saber cambiar de uno a otro es dominar ambos mundos!

Aplicación 5: Química Analítica

Contexto: Una disolución experimental marca alcalinidad midiendo $A = \frac{1}{\log_{H+}(10)}$. Simplifique la expresión química invirtiendo bases para ajustarla al formato tradicional de potencial hidrógeno (pH), sabiendo que $pH = -\log_{10}(H^+)$.

Solución: Subimos el logaritmo invirtiendo argumento y base: $A = \log_{10}(H^+)$. Como la fórmula del pH establece que $pH = -\log_{10}(H^+)$, entonces $\log_{10}(H^+) = -pH$. **Respuesta:** La alcalinidad reescrita es $A = -pH$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Argumente algebraicamente por qué las fórmulas $\frac{\log(x)}{\log(b)}$ y $\frac{\ln(x)}{\ln(b)}$ producirán exactamente el mismo resultado numérico a pesar de usar bases distintas.
2. Un compañero de clase asegura que $\frac{\ln 15}{\ln 3} = \ln 5$. Explique detalladamente el error fatal de su deducción.
3. Justifique geométricamente (en términos de transformaciones gráficas) qué representa multiplicar la función $f(x) = \ln(x)$ por la constante $\frac{1}{\ln(2)}$.
4. ¿Por qué intentar cambiar a base 1 arruina completamente la estructura del logaritmo? Muestre qué sucede en el denominador.
5. Evalúe el sentido analítico de $\log_b(b)$. Si aplicamos cambio de base a e sobre esta expresión, ¿qué obtenemos y cómo confirma esto la propiedad básica?
6. Si en una ecuación exponencial $7^x = 20$ aplicamos logaritmo natural en vez de logaritmo base 7, el resultado final para x, ¿incluye naturalmente un cambio de base? Explique cómo.
7. Demuestre usando la fórmula de cambio de base que $\log_{a^n}(x) = \frac{1}{n}\log_a(x)$.
8. Al simplificar $\log_A(B) \cdot \log_B(A)$, ¿qué propiedad de los números reales justifica que el resultado final sea la unidad perfecta?
9. ¿Cómo utilizaría la fórmula de cambio de base para graficar $y = \log_4(x)$ en una calculadora graficadora que solo posee el botón ln?
10. Si invertimos un logaritmo tal que $\log_{0,5}(2)$, explique conceptualmente por qué el resultado debe ser obligatoriamente negativo.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Convierta $\log_6(24)$ a logaritmos naturales y aproxime su valor a dos decimales.

Guía de Solución Interactiva

1. Escriba la fracción con el logaritmo base e: $\frac{\ln(\_\_\_\_\_\_)}{\ln(\_\_\_\_\_\_)}$.
2. Extraiga valores de la calculadora: $\frac{3{,}178}{1{,}791}$.
3. Resultado de la división aproximada: __________.

Problema 2. Simplifique $\log_3(7) \cdot \log_7(27)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica el efecto de la regla de la cadena. Los sietes se neutralizan, colapsando a un solo logaritmo de base _____ y argumento _____.
2. La nueva expresión es: $\log_3(\_\_\_\_\_)$.
3. Resuelve el exponente directo: ¿3 a qué potencia da 27? Resultado: _____.

Problema 3. Reduzca $T = \frac{1}{\log_4(12)} + \frac{1}{\log_3(12)}$.

Guía de Solución Interactiva

1. Usa la propiedad de inversión para subirlos: $\log_{\_\_\_\_\_}(4) + \log_{\_\_\_\_\_}(3)$.
2. Al compartir la misma base, se agrupan multiplicando los argumentos (regla del producto): $\log_{12}(\_\_\_\_\_ \cdot \_\_\_\_\_)$.
3. Evalúa la expresión final: $\log_{12}(12) = \_\_\_\_\_$.

PROFE TEO

Las fracciones con logaritmos en el denominador están pidiendo a gritos ser "volteadas". Invertir te permite unificarlas mediante la suma o resta normal.

Problemas Generales

Problema 4. Exprese $\log_5(X)$ utilizando únicamente logaritmos de base 10.

Problema 5. Simplifique usando la cadena: $\log_2(11) \cdot \log_{11}(16)$.

Problema 6. Evalúe aproximadamente $\log_8(50)$ usando ln.

Problema 7. Reduzca: $\frac{1}{\log_2(10)} + \frac{1}{\log_5(10)}$.

Problema 8. Simplifique: $\log_a(b) \cdot \log_b(c) \cdot \log_c(a)$.

Problema 9. Cambie a base 3 y resuelva: $\log_9(27)$.

Problema 10. Resuelva la ecuación transformando bases: $\log_2(x)+\log_8(x) = 8$.

Problema 11. Si $\ln(2) = a$ y $\ln(3) = b$, exprese $\log_2(3)$ en función de a y b.

Problema 12. Reduzca a un solo número: $\frac{\log(25)}{\log(5)}$.

Problema 13. Resuelva para x: $\log_x(2) \cdot \log_2(8) = 3$.

Problema 14. Simplifique totalmente $(\log_5(7))(\log_7(25))$.

Problema 15. Resuelva convirtiendo todo a base 2: $\log_4(x^2) - \log_2(x) = 0$.

Problema 16. Evalúe sin calculadora: $\frac{1}{\log_6(42)} + \frac{1}{\log_7(42)}$.

Problema 17. Exprese $\log_3(x)$ en base 9.

Problema 18. Resuelva: $\log_3(x) \cdot \log_x(2x-1) = 2$.

Problema 19. Simplifique la fracción combinada $\frac{\ln(16)}{\log_2(e)}$.

Problema 20. Resuelva analíticamente $\log_x(3) + \log_3(x) = \frac{10}{3}$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. La radiactividad decae midiendo semividas $S = \log_{0,5}(R)$. Transforme el modelo a logaritmos decimales para programar los sensores del reactor civil.

Guía de Solución Interactiva

1. Identifica el argumento _____ y la base _____. 2. Coloca ambos en fracción con base diez: $\frac{\log(\_\_\_\_\_)}{\log(\_\_\_\_\_)}$. 3. La fórmula del sensor programada quedará estructurada como $\frac{\log(R)}{\log(0,5)}$.

Problema 2. Una cámara anecoica mide mitigación acústica $A = \log_4(I) \cdot \log_I(16)$. Emplee la regla dominó para descubrir la constante absoluta reducida de aislamiento.

Guía de Solución Interactiva

1. Elimina cruzado la variable de intensidad representada por la letra _____. 2. Fiel al teorema unifica los bordes sobrantes: log_____(_____). 3. El grado contundente final de aislamiento evalúa exactamente _____.

Problema 3. Los criptógrafos cifran datos generando entropías $E = \frac{1}{\log_B(2)}$. Invierta analíticamente esta fracción para simplificar la encriptación binaria directa.

Guía de Solución Interactiva

1. Subir la expresión transpone simultáneamente base _____ y argumento _____. 2. La nueva raíz logarítmica ostentará forma directa unificada: log_____(_____). 3. La encriptación binaria directa purificada se modelará como $\log_2(B)$.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La termodinámica de un motor requiere balancear fuerzas mediante $F = \frac{\ln(P)}{\ln(1,5)}$. Traduzca este factor pistón hacia un solo logaritmo comprimido dimensionalmente.

Problema 5. Un astrofísico estima brillo estelar evaluando $B = \log_{2,5}(F)$. Configure esta métrica usando logaritmos decimales puros para clasificarla en bases de datos astronómicas globales.

Problema 6. La minería de datos clasifica nodos bajo complejidad $C = \log_3(N) \cdot \log_N(81)$. Simplifique drásticamente para hallar la profundidad máxima del árbol de búsqueda.

Problema 7. Un brote epidemiológico satura contagios modelando días $d = \log_6(C)$. Escriba la progresión infecciosa basándose exclusivamente en constante natural de Euler (e).

Problema 8. La presión hidráulica presuriza cañerías $P = \frac{1}{\log_A(10)} + \frac{1}{\log_B(10)}$. Agrupe sumando resistencias valvulares para obtener tensión unificada.

Problema 9. Una óptica láser concentra haces focalizando magnitud $L = \frac{\log(256)}{\log(4)}$. Calcule el índice refractivo absoluto del prisma sintético.

Problema 10. El sismógrafo calibra ondas telúricas promediando $O = \log_2(M) + \log_4(M)$. Exprese esta sacudida tectónica usando una sola base de escala menor.

Problema 11. Un analgésico diluye metabolitos registrando $\frac{\ln(D)}{\ln(0{,}8)}$ horas. Condense algebraicamente la depuración renal farmacológica hacia su notación de raíz fraccionaria original.

Problema 12. La tasa de inflación anual degrada capital fiduciario $\log_{1,05}(V)$. Convierta este devalúo económico usando proporciones fraccionarias decimales para reportes bancarios trimestrales de inversionistas.

Problema 13. Un dron aerodinámico compensa turbulencia trazando ángulos $\alpha = \log_{\sin\theta}(W) \cdot \log_W(\cos\theta)$. Simplifique vectorialmente las ráfagas laterales enfrentadas altitudinalmente.

Problema 14. La fragua metalúrgica templa acero endureciendo aleaciones con ratio $T = \frac{1}{\log_5(7)} \cdot \frac{1}{\log_7(25)}$. Extraiga coeficientes térmicos precisos para enfriamiento industrial.

Problema 15. El fototropismo botánico tuerce tallos siguiendo exposición lumínica $\log_3(L) + \log_9(L) = 3$. Despeje los lux botánicos captados mediante estomas fotosintéticos foliares.

Problema 16. Las servo-articulaciones robóticas pivotan grados mecánicos $R = \log_2(x) \cdot \log_x(32) \cdot \log_{32}(4)$. Resuelva el giro rotacional exacto calibrado cibernéticamente sin sensores externos.

Problema 17. Un ordenador cuántico superpone qbits exigiendo $\frac{\log_4(Q)}{\log_4(2)}$. Simplifique la matriz probabilística logrando encriptado subatómico dimensional unificado estable.

Problema 18. La salinidad marina altera corrientes convectivas perfiladas por $S = \frac{1}{\log_V(e)}$. Comprima la salobridad oceánica adaptando la densidad volumétrica natural.

Problema 19. Cierta secuencia genética recombina ADN requiriendo igualar $\log_x(16) = \log_2(x)$. Descifre la longitud nucleótida base replicada cromosómicamente evitando empalmes mutacionales letales.

Problema 20. El reactor de fusión estelar genera plasma $E = (\log_3(5))(\log_5(9)) - (\log_4(7))(\log_7(64))$. Evalúe termodinámicamente si la producción energética resulta endotérmica negativa limitante o exotérmica útil.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $\approx 1{,}77$.
2. 3.
3. 1.
4. $\frac{\log(X)}{\log(5)}$.
5. 4.
6. $\approx 1{,}88$.
7. 1.
8. 1.
9. $3/2$ o $1{,}5$.
10. $x = 64$.
11. b/a.
12. 2.
13. $x = 2$.
14. 2.
15. Identidad ($0 = 0$, todo $x > 0$).
16. 1.
17. $\log_9(x^2)$ o $2\log_9(x)$.
18. $x = 9$ (se rechaza si hay negativas).
19. $4\ln(2)\cdot\ln(2) = 4(\ln 2)^2$.
20. $x = 27$ o $x = \sqrt[3]{3}$.

Propuestos de Aplicación

1. Formula $\frac{\log(R)}{\log(0{,}5)}$.
2. Constante 2 ($\log_4(16)$).
3. Código $\log_2(B)$.
4. $\log_{1{,}5}(P)$.
5. $\frac{\log(F)}{\log(2{,}5)}$.
6. Profundidad 4 ($\log_3(81)$).
7. $d = \frac{\ln(C)}{\ln(6)}$.
8. $\log(AB)$.
9. Índice 4.
10. $\frac{3}{2}\log_2(M)$.
11. $\log_{0{,}8}(D)$.
12. $\frac{\log(V)}{\log(1{,}05)}$.
13. $\log_{\sin\theta}(\cos\theta)$.
14. Coeficiente 0,5 (1/2).
15. $L = 9$ lux.
16. Giro de 2 grados ($\log_2(4)$).
17. $\log_2(Q)$.
18. $S = \ln(V)$.
19. $x = 4$.
20. -1 (Endotérmica) $[2-3]$.

$\log_c$

¡Nivel Desbloqueado!

'Cuando te enfrentes a un problema en el que parece que no encajas, recuerda que siempre puedes cambiar la base desde la que lo miras para hallar la solución correcta.'

- El Poder del Cambio de Base

¡Formidable esfuerzo! Ahora posees el conocimiento para dominar cualquier modelo matemático, sin importar qué tan extraña sea su estructura original.

$\ln$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com