$= f(a) + f'(a)(x - a)$

$'(x)dx$

CÁLCULO DE UNA VARIABLE

APROXIMACIONES Y DIFERENCIALES

CUADERNO DE TRABAJO

La Recta Tangente y Estimación de Errores

$\Delta y \approx dy$

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: La Magia de la Tangente

Las funciones no lineales (curvas) son difíciles de calcular mentalmente. ¿Cuánto es $\sqrt{4{,}01}$? Sin calculadora parece un reto. Sin embargo, si hacemos un "zoom"muy profundo en cualquier curva suave, esta se verá como una línea recta. Esa recta es la **recta tangente**.

1. Aproximación Lineal

Si f es derivable en $x = a$, la ecuación de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ se usa para aproximar valores cercanos a a. A esta función lineal se le llama *linealización* de f en a:

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Por tanto, si x está cerca de a, decimos que $f(x) \approx L(x)$.

PROFE TEO

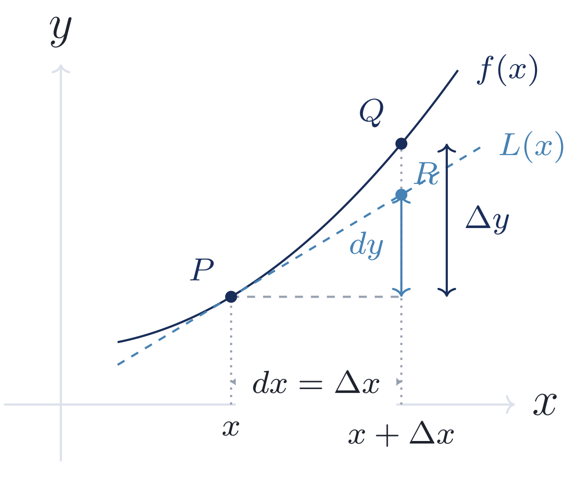
El secreto de la aproximación lineal: ¡usar una recta (fácil de calcular) en lugar de la curva (difícil)! Funciona excelente siempre y cuando no te alejes mucho del punto conocido.

2. Diferenciales

Sea $y = f(x)$. Definimos la **diferencial** dx como una variable independiente (un cambio arbitrario en x, usualmente Δx). La **diferencial** dy es la variable dependiente definida por:

$$dy = f'(x)dx$$

Geométricamente, Δy es el cambio real en la curva, mientras que dy es el cambio sobre la recta tangente. Si dx es pequeño, entonces $\Delta y \approx dy$.



PROFE TEO

¡Ojo con la notación! $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Es el cambio REAL. El dy es la estimación rápida. En problemas de manufactura, dy representa el error propagado aproximado.

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Aproximación Clásica de Raíces

Enunciado: Utilice una aproximación lineal para estimar $\sqrt{4{,}02}$. **Solución:** Elegimos $f(x) = \sqrt{x}$ y el punto cercano exacto $a = 4$. $f(4) = 2$. Derivamos: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \implies f'(4) = \frac{1}{4} = 0{,}25$. La linealización es $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 2 + 0{,}25(x - 4)$. Evaluamos en $x = 4{,}02$: $L(4{,}02) = 2 + 0{,}25(0{,}02) = 2 + 0{,}005 = 2{,}005$. **Respuesta:** $\sqrt{4{,}02} \approx 2{,}005$.

PROFE TEO
Si usas funciones trigonométricas, Δx DEBE estar estrictamente en radianes. Si te dan grados, conviértelos multiplicando por $\pi/180$ antes de operar.

Problema Resuelto 2: Trigonometría y Radianes

Enunciado: Estime el valor de $\sin(31°)$ usando diferenciales. **Solución:** $f(x) = \sin(x)$. Conocemos $a = 30° = \pi/6$. $f(\pi/6) = 0{,}5$. $dx = 1° = \pi/180$ radianes. $dy = f'(x)dx = \cos(x)dx$. Evaluamos en a: $dy = \cos(\pi/6) \cdot (\pi/180) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx (0{,}866)(0{,}0174) \approx 0{,}015$. $\sin(31°) \approx f(a) + dy = 0{,}5 + 0{,}015 = 0{,}515$. **Respuesta:** $\sin(31°) \approx 0{,}515$.

Problema Resuelto 3: Cálculo del Diferencial dy

Enunciado: Halle la diferencial dy para la función $y = x^2 \ln(x)$. **Solución:** La definición es $dy = f'(x)dx$. Derivamos y usando la regla del producto: $f'(x) = 2x\ln(x) + x^2\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\ln(x) + x$. Multiplicamos toda la derivada por dx. **Respuesta:** $dy = (2x\ln x + x)dx$.

Problema Resuelto 4: Estimación de Propagación de Error

Enunciado: El lado de un cubo se mide como 5 cm con un error posible de $\pm 0{,}1$ cm. Estime el error máximo en el cálculo del volumen. **Solución:** Volumen $V = x^3$. $x = 5$, $dx = \Delta x = \pm 0{,}1$. El error propagado es aproximadamente el diferencial dV. $dV = 3x^2dx$. $dV = 3(5^2)(\pm 0{,}1) = 3(25)(\pm 0{,}1) = \pm 7{,}5$. **Respuesta:** El error máximo estimado en el volumen es $\pm 7{,}5$ cm^3.

PROFE TEO
El error relativo es dy/y. Si lo multiplicas por 100, tienes el error porcentual. En problemas físicos, este porcentaje define la viabilidad de la pieza fabricada.

Problema Resuelto 5: Error Relativo y Porcentual

Enunciado: El radio de un disco circular mide 10 cm con error máximo de 0,2 cm. Estime el error relativo y porcentual en su área. **Solución:** Área $A = \pi r^2$. $dA = 2\pi r dr$. $r = 10$, $dr = 0{,}2$. $dA = 2\pi(10)(0{,}2) = 4\pi$. (Error absoluto). Error relativo: $\frac{dA}{A} = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = 2\frac{dr}{r} = 2\left(\frac{0{,}2}{10}\right) = 0{,}04$. Error porcentual: $0{,}04 \times 100\,\% = 4\,\%$. **Respuesta:** Relativo 0,04, porcentual 4 %.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Dilatación Térmica en Placas

Contexto: Una placa metálica cuadrada tiene lado inicial diez centímetros. Por calentamiento, su lado sufre dilatación registrando expansión diferencial neta medio milímetro. Estime el incremento de área superficial neta.
Solución: $A = x^2$. Lado $x = 10$ cm, $dx = 0{,}05$ cm. Diferencial $dA = 2xdx$. Evaluando: $dA = 2(10)(0{,}05) = 1$. **Respuesta:** Aumenta aproximadamente 1 cm^2.

Aplicación 2: Fabricación de Rodamientos

Contexto: En control calidad, un rodamiento esférico requiere radio un centímetro con tolerancia estricta más menos milésima centímetro. Determine diferencial volumétrico máximo para garantizar fricción hidrodinámica.
Solución: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Radio $r = 1$, $dr = \pm 0{,}001$. $dV = 4\pi r^2 dr$. $dV = 4\pi(1^2)(\pm 0{,}001) = \pm 0{,}004\pi$. **Respuesta:** Error máximo de $\pm 0{,}004\pi$ cm^3.

Aplicación 3: Ley de Ohm y Resistencias

Contexto: Un circuito proyecta potencia eléctrica constante $P = V^2/R$. Si la resistencia fija vale veinte ohmios y voltaje decae dos décimas desde cien voltios, determine fluctuación potencia instantánea.
Solución: $P = V^2/20$. $V = 100$, $dV = -0{,}2$. Derivando: $dP = \frac{2V}{20}dV = \frac{V}{10}dV$. Sustituyendo: $dP = \frac{100}{10}(-0{,}2) = 10(-0{,}2) = -2$. **Respuesta:** Potencia cae 2 watts aproximadamente.

PROFE TEO
Nota cómo los diferenciales transforman fórmulas exponenciales complejas en multiplicaciones aritméticas simples. $dR = -2 \times$ tolerancia, sin calculadoras complejas.

Aplicación 4: Desviación Óptica Teodolito

Contexto: Un topógrafo mide altura proyectada edificio usando sombra cien metros y elevación treinta grados. Sensor de nivel registra desvío medio grado angular. Estime desviación altura estructural estimada.
Solución: $h = 100\tan(\theta)$. $\theta = 30° = \pi/6$. $d\theta = 0{,}5° = \pi/360$. $dh = 100\sec^2(\theta)d\theta$. $dh = 100(4/3)(\pi/360) = \frac{400\pi}{1080} = \frac{10\pi}{27}$. **Respuesta:** Error altura $\frac{10\pi}{27}$ metros.

Aplicación 5: Flujo Sanguíneo de Poiseuille

Contexto: Ley hemodinámica dicta flujo vascular proporcional cuarta potencia radio vaso capilar. Vasoconstricción contrae diámetro arterial un porciento absoluto. Estime diferencial porcentual restrictivo impacto circulatorio orgánico instantáneo.
Solución: Flujo $F = kr^4$. Constricción radio $\frac{dr}{r} = -0{,}01$. $dF = 4kr^3dr$. Relativo $\frac{dF}{F} = \frac{4kr^3dr}{kr^4} = 4\frac{dr}{r} = 4(-0{,}01) = -0{,}04$. **Respuesta:** Flujo decae 4 % porcentual estimado.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente argumentando su razonamiento lógico o analítico.

1. Analice la concavidad de la curva $f(x)$. Si la gráfica es cóncava hacia arriba (como $y = x^2$), argumente lógicamente por qué la aproximación lineal siempre subestimará el valor real de la función.

2. El diferencial $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ es exacto, mientras que $dy = f'(x)dx$ es una estimación. Justifique usando límites cómo se comportan estas dos métricas cuando $dx \to 0$.

3. Un compañero calcula $\sin(46°)$ evaluando $f(x) = \sin(x)$ en $x = 45°$, pero utiliza $dx = 1$ en lugar de convertirlo a radianes. Diagnostique el error catastrófico que sufrirá su estimación numérica.

4. Determine matemáticamente si es posible que en una función no lineal el error de estimación ($|\Delta y - dy|$) sea exactamente cero para algún $\Delta x \neq 0$. Demuestre su caso.

5. Evalúe el concepto de error relativo dy/y. Explique por qué en ingeniería es mucho más útil conocer el porcentaje de error propagado que el valor del error absoluto dy.

6. Analice el comportamiento del diferencial dy para funciones afines estrictas de la forma $y = mx + b$. ¿Qué particularidad geométrica ocurre entre la curva real y la recta tangente?

7. Si se utiliza la linealización de $f(x) = \ln(x)$ en $a = 1$ para calcular $\ln(1{,}1)$ y $\ln(10)$, justifique gráficamente por qué la segunda aproximación arrojará un resultado completamente inutilizable.

8. Demuestre formalmente que si el área de un círculo tiene un error relativo de medición del $2\,\%$, entonces su radio fue medido con un margen de error relativo cercano al $1\,\%$.

9. Explique el papel del diferencial dx como variable independiente. ¿Por qué dx puede tomar cualquier valor arbitrario mientras que dy está sujeto estrictamente a la posición y pendiente en la curva?

10. Al calcular volúmenes, la fórmula del error relativo $\frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r}$ es común en esferas y cubos. Analice cómo el exponente de la dimensión física se convierte en el factor multiplicador del error.

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Aproxime el valor de $\sqrt[3]{8{,}06}$ utilizando diferenciales.

Guía de Solución Interactiva

1. Función y punto base: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a =$ _____, $dx =$ _____.
2. Derivada $f'(x) =$ __________, evaluada $f'(8) =$ _____.
3. Linealización: $L(8{,}06) = f(8) + f'(8)dx = 2 + ($_____$)(0{,}06) =$ __________.

Problema 2. Determine la aproximación lineal de $f(x) = e^{0{,}02}$ centrada en el origen.

Guía de Solución Interactiva

1. Elegimos $f(x) = e^x$, punto $a =$ _____, incremento $x = 0{,}02$.
2. Función y pendiente origen: $f(0) =$ _____, $f'(0) =$ _____.
3. Ensamblando recta: $L(x) =$ _____ $+$ _____$(x - 0) \implies e^{0{,}02} \approx$ __________.

Problema 3. Estime el valor de $\ln(0{,}95)$ utilizando aproximación tangente.

Guía de Solución Interactiva

1. Parámetros núcleo: $f(x) = \ln(x)$, ancla $a =$ _____, $dx =$ _____.
2. Análisis derivado: $f'(x) =$ _____, operando $f'(1) =$ _____.
3. Aproximación final: $\ln(0{,}95) \approx \ln(1) + ($_____$)($_____$) =$ __________.

PROFE TEO
Las raíces cuadradas con signos negativos dentro pueden ser engañosas. Si calculas $\sqrt{15{,}8}$, tu a es 16, y tu dx debe ser negativo ($dx = -0{,}2$).

Problemas Generales Analíticos

Problema 4. Calcule el diferencial formal dy de la función $y = x^2 \sin(x)$.

Problema 5. Determine la aproximación lineal para $f(x) = \sqrt{x^2+9}$ en $a = -4$.

Problema 6. Estime numéricamente el valor de $(2{,}001)^5$ sin calculadora.

Problema 7. Halle la diferencial implícita dy de la ecuación $x^2y - y^3 = x$.

Problema 8. Resuelva la aproximación de $\cos(62°)$ (Use $\sqrt{3} \approx 1{,}732$, $\pi \approx 3{,}14$).

Problema 9. Encuentre el error porcentual en $y = \frac{1}{x^2}$ si x tiene un error de $+3\,\%$.

Problema 10. Derive el diferencial para la composición exponencial $y = e^{-x}\tan(x)$.

Problema 11. Determine el diferencial de la función trigonométrica inversa $y = \arcsin(x/2)$.

Problema 12. Obtenga la aproximación lineal $L(x)$ para $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ anclada en $x = 4$.

Problema 13. Estime el valor numérico complejo $\frac{1}{1{,}05^3}$.

Problema 14. Halle diferencial simplificado para curva paramétrica indirecta $\ln(xy) = x + y$.

Problema 15. Calcule error absoluto estimado $y = x \ln x$ evaluado $x = e$ con $dx = 0{,}1$.

Problema 16. Derive estructura racional dy para función hiperbólica analítica $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Problema 17. Resuelva operador diferencial de volumen cilíndrico asumiendo altura estática diez.

Problema 18. Encuentre aproximación tangente para curva $y = \sqrt[4]{15{,}9}$.

Problema 19. Pruebe analíticamente que diferencial de área triangular equilátera es $dA = \frac{\sqrt{3}}{2} x dx$.

Problema 20. Halle porcentaje propagado variable radial si cilindro volumen restringe error dos porciento (altura pura constante).

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Una capa galvánica recubre un cubo metálico de 10 cm de arista. El espesor del baño protector mide exactamente 0,05 cm. Estime el volumen adicional del material protector necesario.

Guía de Solución Interactiva

1. Ecuación volumen: $V = x^3$, $x = 10$, $dx =$ _____ (grosor pared). 2. Diferencial sólido: $dV =$ _____$x^2 dx = 3(100)($_____$)$. 3. Material calculado resultará __________ cm^3.

Problema 2. El periodo péndulo físico oscila $T = 2\pi\sqrt{L/9{,}8}$. Dilatación solar deforma longitud cordel un porciento métrico. Cuantifique desviación rítmica diferencial porcentual cronometrada.

Guía de Solución Interactiva

1. Periodo relativo logarítmico: $\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\frac{\_\_\_\_\_}{L}$. 2. Absorbiendo dilatación porcentual $\frac{dL}{L} =$ _____. 3. Desfase cronométrico marca __________ porcentual estimado.

Problema 3. Un tanque presurizado esférico despresuriza perdiendo radián volumétrico. Monitores marcan reducción del radio en 0,5 milímetros sobre dos metros nominales. Diagnostique el volumen métrico fugado instantáneo.

Guía de Solución Interactiva

1. Operador fuga: $dV = 4\pi r^2($_____$)$. 2. Cuidado unidades: $r =$ _____ m, $dr =$ _____ m. 3. Evaluando parámetros escapa __________ m^3 de gas.

PROFE TEO

En física aeronáutica e ingeniería, tolerancias mayores a un 5 % suelen descartar la linealización. ¡Aquí dy sigue siendo rey para pequeños ajustes termodinámicos!

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. La aerodinámica del fuselaje mide área alar triangular base variable. Error fabricación altera base dos milímetros proyectando diez metros altura constantes. Estime desviación fuerza sustentación alar geométrica pura superficial.

Problema 5. El barómetro de un dron lee presión atmosférica isotérmica escalando $P(h) = 100e^{-0,1h}$. Turbulencia oscila altímetro cien metros con margen un metro. Cuantifique ruido lectura barométrica diferencial.

Problema 6. La acústica de cámara de resonancia cúbica amplifica sonido de estudio armónico. Paneles aislantes restan un milímetro interior. Halle alteración de volumen acústico bruto modelando habitación tres metros estándar.

Problema 7. Un sensor submarino profundo calibra presión abisal hidráulica. Tensión de membrana esférica reporta error radial del cero punto uno porciento bajo presión. Determine error porcentual volumen fluido desplazado.

Problema 8. La catálisis química industrial deforma reactor cilíndrico calorífico. Altura dilata un milímetro sobre cota veinte metros, conservando radio diametral. Cuantifique variación métrica cúbica capacidad contención volumétrica pura productiva.

Problema 9. El flujo magnético cruzando bobina toroidal altera inductancia calculada. Espiras metálicas sufren desgaste calibre reduciendo sección circular dos décimas milimétricas en radio cinco milímetros. Estime pérdida área campo magnético.

Problema 10. El tránsito exoplanetario astronómico oculta estrella proyectando sombra disco circular. Error paralaje distorsiona radio estelar estimado un dos porciento positivo. Pronostique falencia relativa superficie oscurecida estimación astronómica lumínica.

Problema 11. Un cultivo bacteriano plano crece discoidal. Error medición microscópica ocular fluctúa un micrómetro sobre diámetro cincuenta micrones. Determine margen error superficie de biopelícula reproductiva estimada biológica pura.

Problema 12. El pistón elevador hidráulico soporta presión nominal empuje cúbico. Fricción cilindro reduce diámetro operativo un porciento absoluto desgaste. Calcule desviación porcentual capacidad fuerza elevación hidráulica maquinaria pesada teórica.

Problema 13. La máquina láser de corte mecaniza placa aluminio cuadrada. Programación vector desvía tolerancia corte 0,1 milímetro longitud treinta centímetros. Estime pérdida superficie aluminio desperdicio chapa métrica cuadrada neta.

Problema 14. Las aspas del aerogenerador eólico barren área transversal atrapando viento fluido. Desgaste punta álabe acorta longitud aspa cinco centímetros en radio cuarenta metros. Halle déficit superficie energía barrida teórica neta.

Problema 15. Las ondas sísmicas de placa tectónica propagan energía en frentes esféricos crecientes. Error de epicentro localiza radio onda dos kilómetros desviados cruzando mil absolutos. Precise estimación volumen roca terrestre vibratoria.

Problema 16. La balística francotirador corrige caída proyectil angular trayectoria parabólica. Medidor láser falla distancia horizontal un metro sobre mil objetivos. Cuantifique variación marginal caída balística altura impacto estimada neta.

Problema 17. Un arreglo sonar submarino mapea lecho marino rebotando pulsos. Falla termoclina desvía velocidad sonido impactando profundidad calculada un porciento. Determine porcentaje distorsión presión teórica soportada columna agua.

Problema 18. El tanque criogénico aísla nitrógeno esférico confinado. Contracción térmica deforma radio interior dos milímetros sobre tres metros operacionales. Evalúe fuga térmica estimando pérdida volumen gas licuado contenido métrico.

Problema 19. La física cuántica confina electrón caja pozo de potencial cuántico isométrico. Incertidumbre borde fluctúa dimensión atómica uno porciento margen. Halle variación probabilidad espacial volumétrica orbital neta confinada total.

Problema 20. La farmacocinética dosifica pastilla esférica disolución ácida estomacal. Capa entérica degrada radio un milímetro encapsulando cinco núcleos. Calcule diferencial masa absorción torrente sanguíneo digestivo volumétrico pérdida inicial.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. 2,005.
2. 1,02.
3. $-0{,}05$.
4. $(2x\sin x + x^2\cos x)dx$.
5. $L(x) = 5 - \frac{4}{5}(x+4)$.
6. 32,08.
7. $\frac{1-2xy}{x^2-3y^2}dx$.
8. 0,469.
9. $-6\,\%$.
10. $e^{-x}(\sec^2 x - \tan x)dx$.
11. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.
12. $L(x) = 0{,}5 - 0{,}0625(x-4)$.
13. 0,85.
14. $\frac{x(y-1)}{y(1-x)}dx$.
15. 0,2.
16. $\frac{2}{(x+1)^2}dx$.
17. $20\pi r dr$.
18. 1,996875.
19. Verificación trigonométrica ($h = x\sqrt{3}/2$).
20. $1\,\%$.

Propuestos de Aplicación

1. 15 cm^3 adicionales.
2. $0{,}5\,\%$ desfase.
3. $-0{,}008\pi$ m^3 fuga (radio y dr ajustados).
4. 0,01 m^2 desvío área.
5. $\pm 10e^{-10}$ presión ruido (si h=100).
6. $-0{,}027$ m^3 pérdida.
7. $0{,}3\,\%$ porcentaje error.
8. Variante depende R fijo (fórmula cilíndrica).
9. -2π mm^2 magnéticos.
10. $4\,\%$ superficie oscuridad.
11. $\pm 25\pi/2$ micrones^2 ($\pm 12{,}5\pi$).
12. $-2\,\%$ merma elevación.
13. $\pm 0{,}6$ cm^2 pérdida aluminio.
14. -4π m^2 déficit energía.
15. $\pm 8 \times 10^6\pi$ km^3 roca.
16. Depende del ángulo balístico (función).
17. Presión lineal al $1\,\%$ profundidad.
18. $-0{,}072\pi$ m^3 contracción.
19. $\pm 3\,\%$ volumétrica.
20. -100π mm^3 absorción inicial.

¡La Recta del Progreso!

'La vida y el universo no son líneas rectas, son curvas llenas de giros impredecibles. Pero no necesitas conocer el futuro distante; te basta con trazar una buena aproximación lineal en el presente. Concéntrate en el pequeño diferencial de hoy (dx) y verás cómo dominarás el gran cambio del mañana (Δy).'

- El teorema de los pequeños avances

¡Enhorabuena! Has conquistado la elegancia de las aproximaciones analíticas.

$\approx$

dy

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com