PRECÁLCULO

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

CUADERNO DE TRABAJO

Suma, resta, multiplicación y división

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com

Teoría: Combinando Modelos Matemáticos

Así como podemos sumar y restar números reales, también podemos operar con funciones enteras para crear nuevos modelos matemáticos. Sin embargo, al combinar dos funciones, debemos ser extremadamente cuidadosos con el dominio resultante.

PROFE TEO

¡Atención! Para que dos funciones se puedan sumar, restar, multiplicar o dividir, deben .existir.al mismo tiempo en el valor de x. Si una de ellas no existe, la operación fracasa.

1. Definición de las Operaciones

Sean f y g dos funciones. Definimos las nuevas funciones suma, resta, producto y cociente mediante las siguientes reglas, evaluadas para un valor x:

- **Suma:** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **Diferencia:** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- **Producto:** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
- **Cociente:** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

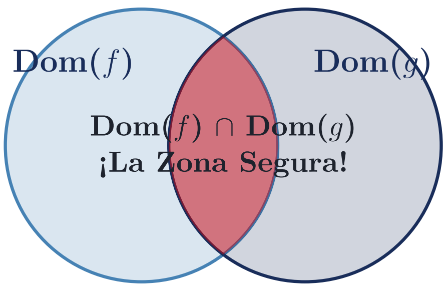
2. Intersección de Dominios

El dominio de la nueva función generada (ya sea suma, resta o multiplicación) consiste en los valores de x que pertenecen **simultáneamente** al dominio de f y al dominio de g.

$$\mathrm{Dom}(f \pm g) = \mathrm{Dom}(f \cdot g) = \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$$

Para la división, aplica la misma intersección, pero **excluyendo** los valores que hacen cero al denominador:

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = [\mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)] \setminus \{x \mid g(x) = 0\}$$



PROFE TEO

Nunca simplifiques una fracción algebraica **antes** de hallar su dominio. Si cancelas factores comunes en el numerador y denominador primero, ¡perderás restricciones valiosas y tu dominio final estará mal!

Bloque I: 5 Problemas Matemáticos Resueltos

Problema Resuelto 1: Suma y Dominio de Radicales

Enunciado: Sean $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = \sqrt{8-x}$. Halle $(f+g)(x)$ y su dominio.
Solución: Ecuación: $(f+g)(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{8-x}$.
Dominio de f: $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3 \implies [3, \infty)$.
Dominio de g: $8 - x \geq 0 \implies 8 \geq x \implies (-\infty, 8]$.
Intersección: $[3, \infty) \cap (-\infty, 8] = [3, 8]$.
Dominio final: $[3, 8]$.

Problema Resuelto 2: División y Agujeros Ocultos

Enunciado: Dadas $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = x - 4$. Halle $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ y su dominio.
Solución: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$. La intersección es $\mathbb{R}$.
Condición del cociente: $g(x) \neq 0 \implies x - 4 \neq 0 \implies x \neq 4$.
Dominio final: $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.
Ahora operamos: $\frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x + 4$.
Respuesta: $(f/g)(x) = x + 4$, con la restricción obligatoria $x \neq 4$.

Problema Resuelto 3: Multiplicación de Funciones Racionales

Enunciado: Encuentre $(f \cdot g)(x)$ si $f(x) = \frac{x}{x-1}$ y $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$. Especifique el dominio.
Solución: Dominios originales: $x \neq 1$ y $x \neq -2$. Intersección: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.
Multiplicamos: $\frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x+2}$. Cancelamos $(x-1)$.
Respuesta: $(f \cdot g)(x) = \frac{x}{x+2}$, válido solo para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

PROFE TEO
En el Problema 2, aunque la respuesta parece una recta continua $y = x + 4$, en realidad tiene un "hueco.en $x = 4$ por culpa del dominio original.

Problema Resuelto 4: Resta de Polinomios Evaluados

Enunciado: Si $f(x) = x^2 - 3x + 1$ y $g(x) = 2x - 5$, halle $(f - g)(-2)$.
Solución: Método 1 (Directo): Evaluamos cada una en -2.
$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) + 1 = 4 + 6 + 1 = 11$.
$g(-2) = 2(-2) - 5 = -4 - 5 = -9$.
Restamos: $f(-2) - g(-2) = 11 - (-9) = 11 + 9 = 20$.

Problema Resuelto 5: Cociente Nulo

Enunciado: Halle el dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ si $f(x) = \sqrt{x+5}$ y $g(x) = x^2 - 9$.
Solución: $\text{Dom}(f) : x \geq -5$. $\text{Dom}(g) : \mathbb{R}$. Intersección: $[-5, \infty)$.
Condición extra: El denominador no puede ser cero. $x^2 - 9 \neq 0 \implies x \neq 3$ y $x \neq -3$.
Retiramos el 3 y el -3 del intervalo $[-5, \infty)$.
Dominio final: $[-5, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

Bloque II: 5 Aplicaciones Resueltas

Aplicación 1: Ganancias Netas

Contexto: Los ingresos diarios de una fábrica son $I(q) = 150q$. Sus gastos operativos se modelan con $G(q) = 2q^2 + 10$. Encuentre la función de beneficio neto diario y evalúelo para 10 artículos.
Solución: El beneficio es Ingresos menos Gastos: $B(q) = (I - G)(q) = 150q - (2q^2 + 10) = -2q^2 + 150q - 10$.
Para $q = 10$: $B(10) = -2(100) + 1500 - 10 = 1290$.

Aplicación 2: Producción Conjunta

Contexto: Un robot ensamblador arma $A(t) = 5t + 2$ piezas por hora. Un operario humano ensambla $M(t) = 3t$. Plantee la ecuación que representa la productividad total conjunta.
Solución: La producción conjunta es la suma de ambas funciones:
$(A + M)(t) = (5t + 2) + 3t = 8t + 2$.
Respuesta: La productividad total se rige por $8t + 2$ piezas.

Aplicación 3: Densidad Biométrica

Contexto: La población de un cultivo celular crece bajo $P(t) = 1000t^2$. El área de la placa expansiva es $A(t) = 5t + 10$. Construya la función de densidad poblacional.
Solución: La densidad es la población dividida por el área. Usamos el cociente de funciones.
Respuesta: $D(t) = \left(\frac{P}{A}\right)(t) = \frac{1000t^2}{5t+10} = \frac{200t^2}{t+2}$.

PROFE TEO
En física y economía, la división de funciones casi siempre genera "tasas.º "promedios"(ej. Costo Unitario = Costo Total / Cantidad, Velocidad = Distancia / Tiempo).

Aplicación 4: Dimensiones Topográficas

Contexto: El volumen de arena extraída en un proyecto es $V(h) = h^3 + 5h^2$. Si el área de la fosa base mide $A(h) = h^2$, calcule la función de profundidad.
Solución: Profundidad = Volumen / Área base.
$\left(\frac{V}{A}\right)(h) = \frac{h^3+5h^2}{h^2} = \frac{h^2(h+5)}{h^2}$. Cancelando h^2 (asumiendo $h > 0$):
Respuesta: La profundidad equivale a $h + 5$.

Aplicación 5: Análisis Eléctrico

Contexto: El amperaje de un circuito aumenta según $I(v) = v + 4$. La resistencia conductiva crece linealmente $R(v) = 2v$. Establezca la función del voltaje disipado mediante la ley de Ohm ($V = I \cdot R$).
Solución: El voltaje requiere la multiplicación de ambas funciones:
$(I \cdot R)(v) = (v + 4) \cdot 2v = 2v^2 + 8v$.
Respuesta: La caída de tensión se modela por $2v^2 + 8v$.

Bloque III: 10 Problemas de Reflexión

Responda conceptualmente con argumentos analíticos.

1. Si $\text{Dom}(f) = (-\infty, 5]$ y $\text{Dom}(g) = [10, \infty)$, argumente por qué es imposible calcular $(f + g)(x)$.
2. Explique por qué el dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ no es necesariamente igual al dominio de $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$, a pesar de usar las mismas funciones base.
3. Dado $f(x) = x$. Si calculamos el cociente $(f/f)(x) = x/x = 1$, ¿significa que el dominio es absolutamente todos los números reales $\mathbb{R}$? Justifique.
4. Geométricamente, ¿qué le ocurre a las alturas (coordenadas y) de las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ cuando las sumamos para formar $(f + g)(x)$?
5. Si $f(x)$ es el costo total de producir x computadoras, ¿qué representa conceptualmente la nueva función formada por $f(x)/x$?
6. Si se resta una función de sí misma: $(f-f)(x) = 0$. ¿Qué restricción de dominio se le sigue aplicando al resultado nulo?
7. Al multiplicar una parábola $f(x) = x^2$ y una recta $g(x) = x$, se genera la cúbica $h(x) = x^3$. ¿Qué ocurre con la simetría par e impar durante la multiplicación?
8. Un compañero afirma que $\text{Dom}(f+g)$ es la ünión"de los dominios individuales para abarcar ambos conjuntos. Corrija y fundamente este error conceptual.
9. Analice el producto de $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{-x}$. ¿En qué único punto existe la función resultante?
10. ¿Por qué en ciencias aplicadas es tan común restar funciones (ej. Fuerzas opuestas, Ingresos - Costos) para hallar el comportamiento neto del sistema?

Bloque IV: 20 Problemas Propuestos Matemáticos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Si $f(x) = 4x - 2$ y $g(x) = 2x + 5$, halle $(f + g)(x)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Escribimos la suma: $(4x - 2) + (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$.
2. Agrupamos términos semejantes: $(4x + \_\_\_\_\_) + (-2 + \_\_\_\_\_)$.
3. Resultado final simplificado: __________.

Problema 2. Si $f(x) = x - 3$ y $g(x) = x + 3$, halle $(f \cdot g)(x)$.

Guía de Solución Interactiva

1. Escribimos el producto: $(x - 3) \cdot (\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)$.
2. Aplicamos diferencia de cuadrados: $x^2 - (\_\_\_\_\_)^2$.
3. Resultado final: __________.

Problema 3. Halle $(f/g)(x)$ y su dominio para $f(x) = x^2 - 25$ y $g(x) = x - 5$.

Guía de Solución Interactiva

1. Formamos la fracción: $\frac{x^2-25}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$.
2. Factorizamos el numerador: $\frac{(x-5)(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)}{x-5}$.
3. Cancelamos y anotamos restricción: Resulta _______, para $x \neq$ _____.

PROFE TEO
En el cociente de funciones, el divisor siempre va abajo. $(f/g)(x)$ no es lo mismo que $(g/f)(x)$. ¡Respeta el orden!

Problemas Generales

Problema 4. Dadas $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x$, halle $(f - g)(x)$.

Problema 5. Si $f(x) = \sqrt{x+4}$ y $g(x) = x - 2$, evalúe $(f \cdot g)(5)$.

Problema 6. Halle el dominio de $(f+g)(x)$ si $f(x)=\frac{1}{x-1}$ y $g(x)=\frac{1}{x+3}$.

Problema 7. Si $f(x)=2x$ y $g(x)=x^2+1$, calcule $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$.

Problema 8. Halle la función producto $(f\cdot g)(x)$ para $f(x)=\sqrt{x}$ y $g(x)=\sqrt{x^3}$.

Problema 9. Encuentre el dominio de $(f/g)(x)$ donde $f(x)=x+7$ y $g(x)=x^2-x-6$.

Problema 10. Simplifique $(f+g)(x)$ para $f(x)=\frac{x}{x+1}$ y $g(x)=\frac{1}{x+1}$.

Problema 11. Si $h(x)=x^3-8$ y $k(x)=x-2$, halle el cociente $(h/k)(x)$ simplificado.

Problema 12. Determine el dominio de la suma de $f(x)=\ln(x)$ y $g(x)=\sqrt{5-x}$.

Problema 13. Si $m(x)=2^x$ y $n(x)=2^{-x}$, halle $(m\cdot n)(x)$.

Problema 14. Reste $g(x) = \frac{1}{x}$ de $f(x) = \frac{1}{x^2}$ y exprese como una sola fracción.

Problema 15. Halle el dominio de $(f \cdot g)(x)$ para $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$ y $g(x) = x - 5$.

Problema 16. Calcule $(f/g)(0)$ si $f(x) = e^x - 1$ y $g(x) = \cos(x)$.

Problema 17. Si $p(x) = x^2 + 4x + 4$ y $q(x) = \sqrt{x}$, halle $(p \cdot q)(x)$ simplificado.

Problema 18. Encuentre el dominio de $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ si $f(x) = \sqrt{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x-4}$.

Problema 19. Desarrolle el cuadrado de la suma de funciones: $(f+g)^2(x)$ asumiendo $f(x) = x$ y $g(x) = 3$.

Problema 20. Halle el dominio de la operación compuesta $(f \cdot g/h)(x)$ donde $f = x, g = \sqrt{x}, h = x - 1$.

Bloque V: 20 Problemas de Aplicación Propuestos

Ejercicios Guiados Paso a Paso

Problema 1. Las ventas mensuales siguen $V(t) = 50t$. Los gastos son $G(t) = 10t + 5$. Halle la función de ganancia neta consolidada.

Guía de Solución Interactiva

1. Ganancia = Ventas __________ Gastos. 2. Planteamos: $50t - ($__________$)$. 3. Función final: $B(t) =$ __________.

Problema 2. Un dron vuela distancia $D(x) = x^3 + 2x$. El tiempo invertido es $T(x) = x$. Encuentre la función de velocidad del aparato.

Guía de Solución Interactiva

1. Velocidad se define como Distancia dividida por __________. 2. Planteamos la fracción: $\frac{x^3+2x}{\_\_\_\_}$. 3. Simplificamos (con $x \neq 0$): $V(x) =$ __________.

Problema 3. Un tanque A contiene $100 - x$ litros. Un tanque contiguo B posee $2x + 50$ litros. Formule el volumen total de ambos recipientes.

Guía de Solución Interactiva

1. El volumen total requiere la __________ de ambas funciones. 2. Agrupamos los polinomios: $(100 - x) + ($__________$)$. 3. Expresión consolidada: $V_{tot}(x) =$ __________ litros.

Problemas Generales Contextualizados

Problema 4. El ingreso digital es $I(d) = 200d - d^2$. Los costos del servidor ascienden a $C(d) = 50d + 10$. Determine el beneficio diario del sistema.

Problema 5. Un organismo consume $A(t) = t^2$ microgramos de glucosa. Otro espécimen consume $B(t) = \sqrt{t}$. Exprese algebraicamente el consumo biológico conjunto.

Problema 6. La masa de un cristal sintético es $M(h) = h^3 + 8$. Su volumen medido es $V(h) = h + 2$. Formule su densidad interna dependiente del tiempo.

Problema 7. Una turbina emite empuje $E(s) = 500s^2$. La fricción atmosférica le resta fuerza aerodinámica según $F(s) = 10s^3$. Halle la fuerza neta resultante.

Problema 8. El área de un terreno agrícola crece bajo $A(m) = m^2 + 7m + 10$. Si su ancho mide $m + 2$, calcule la función que define rigurosamente su longitud.

Problema 9. Dos paneles solares acumulan energía. El primero entrega $E_1(t) = 15t$, el segundo $E_2(t) = 25t - 5$. Determine la producción energética combinada de la granja.

Problema 10. Un software cifra archivos a velocidad $V(x) = \frac{100}{x}$. La red los transmite bajo $T(x) = x^2$. Formule el flujo de procesamiento multiplicando ambas métricas.

Problema 11. La población de un enjambre es $P(w) = 1000 + 50w$. El área construida abarca $A(w) = 20 + w$. Calcule la densidad habitacional de la colmena.

Problema 12. Un ciclista agota kilómetros mediante $K(h) = h^3 - h$. Si las calorías quemadas por kilómetro son $C(h) = 50h$, halle la quema metabólica total.

Problema 13. Una presa hídrica retiene $A(d) = \sqrt{d+10}$ galones. La evaporación solar le arrebata $E(d) = \frac{d}{5}$. Escriba la función del agua neta preservada en reserva.

Problema 14. El tonelaje de un puente es $P(t) = t^4 - 16$. El conteo de vigas portantes obedece $N(t) = t^2+4$. Determine el peso promediado soportado por pilar.

Problema 15. Una red de datos maneja $S(m) = 10^m$ paquetes. Las colisiones perdidas suman $F(m) = 2^m$. Exprese la proporción matemática de fallas sobre tráfico global.

Problema 16. Dos extrusoras hilan polímeros. La primera genera $H_1(x) = \frac{x}{x-2}$. La otra máquina procesa $H_2(x) = \frac{3}{x-2}$. Calcule el diferencial de rendimiento entre ambas.

Problema 17. La demanda mercantil acusa $D(p) = 500 - 2p$. Considerando el precio unitario escalable p, modele los ingresos financieros cruzando demanda frente a tarifa.

Problema 18. Un núcleo emite radiactividad $R(t) = |t-5|$. El sarcófago de plomo absorbe $A(t) = \frac{t}{2}$. Plantee la fuga radiactiva residual que contamina el entorno.

Problema 19. La polución química en la bahía marca $T(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Sabiendo que el caudal líquido es $V(x) = x^2 + 1$, halle la masa tóxica disuelta.

Problema 20. Una litográfica consume tintura negra por $N(h) = h^2 + 3h$ y pigmentos a color por $C(h) = \sqrt{h^3}$. Extraiga la ecuación de desgaste de cartuchos global.

Claves de Respuestas

Propuestos Matemáticos

1. $6x+3$
2. x^2-9
3. $x+5$ $(x\neq 5)$
4. $2x^2+4x$
5. $9\cdot 3=27$
6. $\mathbb{R}\setminus\{1,-3\}$
7. $6/10=3/5$
8. x^2 $(x\geq 0)$
9. $\mathbb{R}\setminus\{3,-2\}$
10. 1 $(x\neq -1)$
11. x^2+2x+4 $(x\neq 2)$
12. $(0,5]$
13. 1
14. $\frac{1-x}{x^2}$
15. $(0,\infty)$
16. $0/1=0$
17. $x^{5/2}+4x^{3/2}+4x^{1/2}$
18. $(4,\infty)$
19. x^2+6x+9
20. $[0,1)\cup(1,\infty)$

Propuestos de Aplicación

1. $B(t)=40t-5$
2. $V(x)=x^2+2$
3. $V_{tot}(x)=x+150$
4. $B(d)=-d^2+150d-10$
5. $(A+B)(t)=t^2+\sqrt{t}$
6. $D(h)=h^2-2h+4$
7. $F_{neta}(s)=-10s^3+500s^2$
8. $L(m)=m+5$
9. $E_{tot}(t)=40t-5$
10. $P(x)=100x$
11. $D(w)=\frac{1000+50w}{20+w}$
12. $Q(h)=50h^4-50h^2$
13. $R(d)=\sqrt{d+10}-\frac{d}{5}$
14. $W(t)=t^2-4$
15. $R(m)=5^{-m}$ o $(1/5)^m$
16. $\Delta(x)=\frac{x-3}{x-2}$
17. $I(p)=500p-2p^2$
18. $F(t)=|t-5|-\frac{t}{2}$
19. $M(x)=1$ unidad de masa constante
20. $G(h)=h^2+3h+h\sqrt{h}$

¡Llegaste al Final!

’Conocer el dominio te dice dónde estás parado, pero saber combinar funciones te permite diseñar sistemas completos que modelan toda la realidad.’

- La arquitectura del álgebra

¡Felicidades! Has dominado el cruce de modelos matemáticos. A partir de ahora, ninguna restricción de dominio ni álgebra densa volverá a engañar a tu análisis crítico.

Prof. Teófilo Teves

www.teoteves.com